国家教材委员会专家委员会审核通过 2019

普通高中教科书

数学

必修

第三册

B版

人民教育出版社

普 通 高 中 教 科 书

数学

必 修

第三册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社
·北京·

B版

主　　编：高存明
副 主 编：王殿军　朱志勇　龙正武
本册主编：闻　岩　黄　铎
其他编者：王光明　王旭刚　李　梁　杨凤文　高雪松　曹春雷

普通高中教科书　数学（B 版）　必修　第三册
人民教育出版社　课程教材研究所
中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组　编著

出　　版　人民教育出版社
（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn

前　言

人们喜欢音乐，是因为它拥有优美和谐的旋律；人们喜欢美术，是因为它描绘了人和自然的美；人们喜欢数学，是因为它用空间形式和数量关系刻画了自然界和人类社会的内在规律，用简洁、优美的公式与定理揭示了世界的本质，用严谨的语言和逻辑梳理了人们的思维……

我国著名数学家华罗庚先生曾经指出：数学是一切科学的得力助手和工具；任何一门科学缺少了数学这一工具便不能确切地刻画出客观事物变化的状态，更不能从已知数据推出未知的数据来，因而就减少了科学预见的可能性，或者减弱了科学预见的准确度.

事实上，任何一项现代科学技术的出现与发展，背后都一定有数学知识的支撑. 互联网的普及、共享经济的繁荣、网络支付的便利、物联网的兴起、人工智能的发展、大数据的应用，离开了数学知识都是不可能的！并且，现代生活中，类似“逻辑”“函数”“命题”“线性增长”“指数增长”“概率”“相关性”等数学术语，在政府文件、新闻报道中比比皆是.

正如《普通高中数学课程标准（2017 年版）》（以下简称“课程标准”）所指出的：数学在形成人的理性思维、科学精神和促进个人智力发展的过程中发挥着不可替代的作用. 数学素养是现代社会每一个人应该具备的基本素养. 高中生学习必需的数学知识，能为自身的可持续发展和终身学习奠定基础.

为了帮助广大高中生更好地学习相关数学知识，我们按照课程标准的要求编写了这套高中数学教材. 在编写过程中，我们着重做了以下几项工作.

1. 关注学生成长，体现时代特征

教材在选取内容的背景素材时，力图从学生熟悉的情境出发，着力体现时代特征，并为学生的成长提供支撑. 例如，以下内容在本套教材中都有所体现：利用数学知识破解魔术的“秘密”，用生活中的例子说明学习逻辑知识以及理性思考的重要性，从数学角度理解报刊上有关人工智能、新兴媒体等报道中出现的“线性增长”“爆炸式增长”等名词.

教材中还提到了“网络搜索”“人工智能”“自主招生”“环境保护”“大数据”“按揭贷款”“电子商务”“创业创新”等. 我们相信，这些能引起大家的共鸣.

此外，教材中多处出现了借助现代信息技术学习数学知识的内容，包括怎样借助数学软件解方程、不等式，怎样借助信息技术呈现统计结果、展示模拟过程，等等.

在体现时代特征的同时，我们也特别注重对中华优秀传统文化的展示. 例如，教材中精选了多道我国古代数学名题，启发大家从数学角度去理解“失败乃成功之母”“三个臭皮匠，顶个诸葛亮”等语句的含义，呈现了与二十四节气、古典诗词等有关的调查数据，介绍了《九章算术》在代数上的成就以及我国古代的统计工作，等等.

2. 吸收先进理念，改变呈现方式

在教材编写过程中，编者认真学习和讨论了当前教育学、心理学等学科的先进理念，并通过改变教材呈现方式来加以体现，力图真正做到“以学习者为中心”.

例如，教材每一章都引用了一段名人名言，旨在为大家的数学学习提供参考和指引；通过“情境与问题”栏目，展示相关数学知识在现实生活等情境中的应用；利用“尝试与发现”栏目，鼓励大家大胆尝试，并在此基础上进行猜想、归纳与总结；通过填空的方式，培养大家学习数学的信心；选择与内容紧密联系的专题，设置拓展阅读，以拓宽大家的知识面，了解数学应用的广泛性；等等.

3. 遵循认知规律，力求温故知新

数学学习必须循序渐进是一种共识. 基础不扎实是很多人学不好数学的重要原因，本套教材在编写时特别考虑了这一点.

事实上，教材一方面按照课程标准的要求，讲解和复习了高中数学必备的集合、等式、不等式等内容；另一方面，在呈现新知识时，教材注重从已有知识出发，在回顾的基础上通过实际例子逐步引入，尽力展现新旧知识的联系，以达到温故知新的效果.

例如，教材在复习了变量以及初中函数概念的基础上介绍了函数中的对应关系，在回顾了整数指数幂、二次根式等后引入了分数指数幂，等等.

正因为如此，即使是初中数学基础比较薄弱的同学，使用本套教材也能顺利地进行学习，并最终达到理想的效果. 这在本套教材试教过程中已得到印证.

4. 揭示内容本质，重视直观理解

数学知识具有客观性，但数学知识的理解有多种方式与途径. 揭示内容本质，培养大家对数学内容的直观理解，是我们编写本套教材时特别注意的方面之一.

首先，教材内容的安排突出主线，强调“通性通法”. 例如，多次强调了配方法的使用，自始至终贯彻函数的研究应从特殊到一般、从性质到图象，等等.

其次，尽量自然地引入新内容或新方法. 例如，通过实例说明学习中位数、百分位数的必要性，通过对比说明用样本估计总体的合理性，等等.

最后，注重培养大家的数学学科核心素养. 课程标准提出的数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析，在教材中都得到了落实. 仅以数学抽象为例，教材处处强调了自然语言与符号语言之间的相互转化等.

总的来说，“引导学生会用数学眼光观察世界，会用数学思维思考世界，会用数学语言表达世界”并不容易. 为此，我们在编写教材时做了很多新的尝试，力图给大家提供一套有时代特色、易教易学的数学教材，以帮助大家学习.

本书是这套教材必修部分的第三册，呈现了三角函数、向量的数量积与三角恒等变换的内容. 通过本书的目录与每章的“本章导语”，可以大致了解本书的全貌，这里不再重复.

由于编写时间有限等原因，书中难免会有疏漏之处，敬请大家多提宝贵意见，以使教材日臻完善.

编者

2019 年 4 月

目录

本书拓展阅读目录

因为科学是不断发展的，任何人不单纯是把前人的知识记下来，而更重要的是继承和发扬前人所掌握的方法，以便在遇到新的问题时能灵活运用．因此，学数学，记忆公式和背诵成法乃是一种很坏的学习方法．

——关肇直

第七章

三角函数

本章导语

我们已经知道，利用前面学过的一次函数、二次函数、指数函数、对数函数、幂函数等，可以描述多种类型的运动或变化规律. 不过，对于周期性运动或变化来说，虽然我们很熟悉，而且也知道怎样进行简单描述，但是，系统刻画周期性运动或变化的知识，我们还没有完整地学习过.

例如，被称为“天津之眼”的天津永乐桥摩天轮，是一座跨河建造、桥轮合一的摩天轮，直径为 110 m，如图 1 所示. 如果“天津之眼”每 30 min 转动一周，而且假设是匀速转动，摩天轮的半径 AB 在 t min 内转过的角为 y 度，则

$$y=\frac{360}{30}t=12t.$$

图 1

如果设摩天轮圆周上的点 B 离地面的高度为 h m，那么 h 与 t 之间的函数关系怎样表示呢？这需要借助本章我们即将学习的三角函数知识才能完成.

需要说明的是，我们根据摩天轮提出来的问题并不是“没事找事”，类似的问题在工程中有着重要的应用.

例如，人们经常要将直线运动与圆周运动进行相互转化. 图 2 的发动机示意图中，活塞的直线运动就要转化为圆周运动才能方便利用.

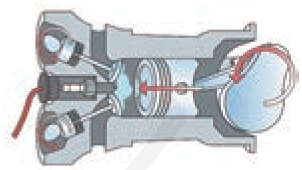


图 2

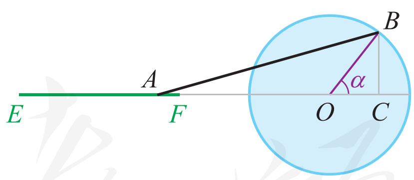


图 3

类似的情况可以用图 3 来示意，其中 AB 是直杆，端点 B 固定在圆 O 的圆周上，当端点 A 沿线段 EF 运动时，OB 绕点 O 旋转. 此时 BC 的变化规律与端点 A 的运动规律有关.

本章我们首先对角的概念进行推广，然后介绍任意角的正弦、余弦和正切，最后学习三角函数的性质，并初步了解怎样用三角函数描述周期性运动或变化.

7.1　任意角的概念与弧度制

7.1.1　角的推广

1. 角的概念的推广

在小学和初中，我们把有公共端点的两条射线组成的图形称为角，这个公共端点称为角的顶点，这两条射线称为角的边．同时我们还知道，角可以看成是一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形．例如，图 7-1-1 所示的大小为 120°的角，用以前的观点来看，既可以认为是 OA 旋转到 OB 所形成的，也可以认为是 OB 旋转到 OA 所形成的.

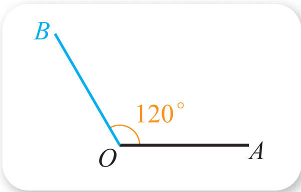


图 7-1-1

我们以前所学过的角，大小一般不会超过一个周角（360°）的大小.

情境与问题

如图 7-1-2 所示，当摩天轮在持续不断地转动时，

（1）摩天轮所转过的角度大小是否会超过 360°？

（2）如果甲、乙两人分别站在摩天轮的两侧观察，那么他们所看到的摩天轮旋转方向相同吗？如果不同，你能用合适的数学符号表示这种不同吗？

从这个实例出发，你能将以前所学的角进行推广吗？

图 7-1-2

显然，上述情境中，只要时间足够长，摩天轮所转过的角的大小会超过 360°．而且，甲、乙两人所观察到的摩天轮旋转方向相反：如果其中一人观察到的是逆时针旋转，则另一人观察到的是顺时针旋转．由于相反意义的量可以用正负数表示，因此不难想到这种不同可以用正负号来区分.

由此就可以将角的概念进行推广：一条射线绕其端点旋转到另一条射线所形成的图形称为角，这两条射线分别称为角的始边和终边．射线的旋转有两个相反的方向：顺时针方向和逆时针方向．习惯上规定，按照逆时针方向旋转而成的角称为**正角**；按照顺时针方向旋转而成的角称为**负角**；当射线没有旋转时，我们也把它看成一个角，称为**零角**．这样定义的角，由于是旋转生成的，所以也常称为转角．

值得注意的是，上述角的定义中，当射线绕其端点按逆时针方向或按顺时针方向旋转时，旋转的绝对量可以是任意的．因此，角的概念经过以上的推广以后，就包括正角、负角、零角．也就是说，角的大小是任意的．由此，我们把角的概念推广到了任意角．

作图时，常用带箭头的弧来表示旋转的方向和旋转的绝对量．如图 7-1-3(1)(2)表示的两个转角中，射线 OA 绕端点 O 旋转到 OB 时，旋转的绝对量都超过了一个周角的大小，按照图中箭头所指的旋转方向和弧线所表示的周数，可知

$$\alpha=450^\circ,\ \beta=-630^\circ.$$

图 7-1-3

尝试与发现

角的概念推广之后，利用转角给出 $60^\circ+90^\circ$ 与 $90^\circ-30^\circ$ 的几何意义．

利用转角，可以给出角的加减运算的一个几何意义．例如，对于 $60^\circ+90^\circ$ 来说，如图 7-1-4(1)所示，射线 OA 逆时针方向旋转[①]到 OB 所形成的角为 60°，OB 逆时针方向旋转到 OC 所形成的角为 90°，则 OA 逆时针方向旋转到 OC 所形成的角为

$$60^\circ+90^\circ=150^\circ.$$

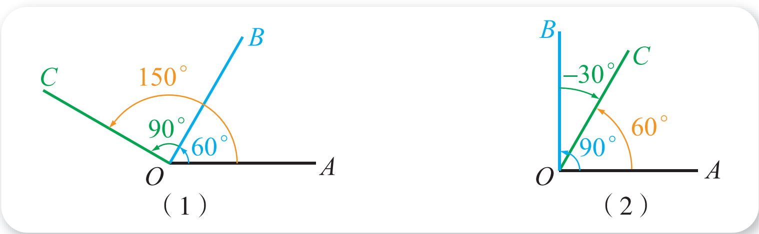


图 7-1-4

① 均指绕端点 O 旋转，下同．

类似地，如图 7-1-4(2)所示，射线 OA 逆时针方向旋转到 OB 所形成的角为 $90°$，OB 顺时针方向旋转到 OC 所形成的角为 $-30°$，则 OA 逆时针方向旋转到 OC 所形成的角为

$$90°-30°=60°.$$

2. 象限角

为了方便起见，通常将角放在平面直角坐标系中来讨论，并约定：角的顶点与坐标原点重合，角的始边落在 x 轴的正半轴上．这时，角的终边在第几象限，就把这个角称为第几象限角．如果终边在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限．

例如，图 7-1-5(1)中的 $45°$，$-315°$，$405°$角都是第一象限角；图 7-1-5(2)中的 $126°$角是第 1 ______ 象限角，$210°$角是第三象限角，$-60°$角是第 2 ______ 象限角，$-90°$角不是象限角，其终边在 y 轴的负半轴上．

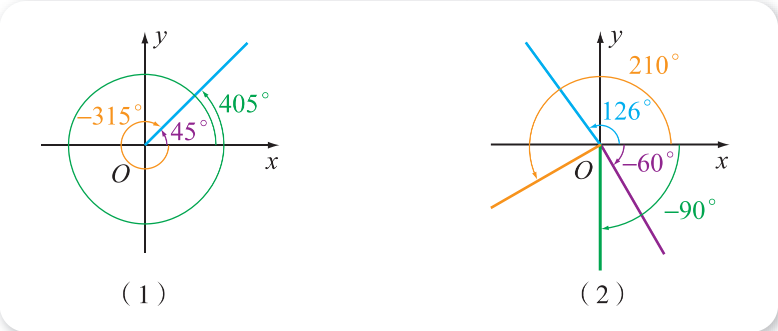


图 7-1-5

尝试与发现

图 7-1-5(1)中三个角的终边相同．那么，终边相同的角有没有一个共同的表示方法呢？

一般地，角 $\alpha+k\cdot360°$ ($k\in\mathbf{Z}$) 与角 α 的终边相同，这只需把 $k\cdot360°$ 看成逆时针或者顺时针方向旋转若干周即可．任意两个终边相同的角，它们的差一定是 $360°$的整数倍．因此，所有与 α 终边相同的角组成一个集合，这个集合可记为

$$S=\{\beta \mid \beta=\alpha+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}.$$

即集合 S 的每一个元素的终边都与 α 的终边相同，$k=0$ 时对应元素为 3 ______．

例 1 如图 7-1-6 所示，已知角 α 的终边为射线 OA，分别作出角 $\alpha+90^\circ$，$\alpha-90^\circ$，$\alpha+180^\circ$的终边.

解 由角的定义可知，把角 α 的终边 OA 逆时针方向旋转 90°可得角 $\alpha+90^\circ$的终边 OB，把角 α 的终边 OA 顺时针方向旋转 90°可得角 $\alpha-90^\circ$的终边 OC，把角 α 的终边 OA 逆时针方向旋转 4 ______ 可得角 $\alpha+180^\circ$的终边 OD，如图 7-1-6 所示.

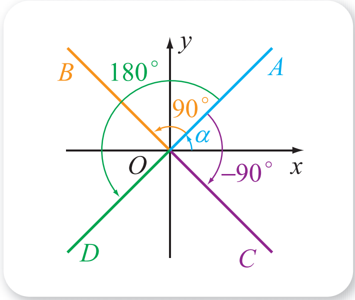


图 7-1-6

例 2 分别写出与下列各角终边相同的角的集合 S，并把 S 中满足不等式$-360^\circ\leqslant\beta<720^\circ$的元素 β 写出来.

（1）60°；（2）-21°.

解 （1）$S=\{\beta \mid \beta=60^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

解不等式$-360^\circ\leqslant 60^\circ+k\cdot 360^\circ<720^\circ$，得$-1-\dfrac{1}{6}\leqslant k<2-\dfrac{1}{6}$，所以 k 可取-1，0 或 1. 因此 S 中满足$-360^\circ\leqslant\beta<720^\circ$的元素是

$$60^\circ+(-1)\times 360^\circ=-300^\circ,$$
$$60^\circ+0\times 360^\circ=60^\circ,$$
$$60^\circ+1\times 360^\circ=420^\circ.$$

（2）$S=\{\beta \mid \beta=-21^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

解不等式$-360^\circ\leqslant -21^\circ+k\cdot 360^\circ<720^\circ$，得

$$-1+\frac{21}{360}\leqslant k<2+\frac{21}{360},$$

所以 k 可取 5 ______. 因此 S 中满足$-360^\circ\leqslant\beta<720^\circ$的元素是

$$-21^\circ+0\times 360^\circ=-21^\circ,$$
$$-21^\circ+1\times 360^\circ=339^\circ,$$
$$-21^\circ+2\times 360^\circ=699^\circ.$$

例 3 写出终边在第一象限内的角的集合.

解 因为大于 0°且小于 90°的角的终边一定在第一象限，而且如果一个角的终边在第一象限，那么这个角的终边一定与大于 0°且小于 90°的某个角的终边相同，因此终边在第一象限内的角的集合为

$$\{\alpha \mid k\cdot 360^\circ<\alpha<90^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}\}.$$

例 4 写出终边在 x 轴上的角的集合.

解 在 $0^\circ\sim 360^\circ$①内，终边在 x 轴上的角有两个，即 0°和 180°，与这两个角终边相同的角组成的集合依次为

① 本书中，在表示角的范围时，我们约定 $0^\circ\sim 360^\circ$的角 α 指的是 $0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$.

$$S_1=\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\},$$
$$S_2=\{\alpha \mid \alpha=180°+k\cdot 360°,\ k\in \mathbf{Z}\}.$$

为简便起见，我们把集合 S_1 和 S_2 的表示方法改为

$$S_1=\{\alpha \mid \alpha=2k\cdot 180°,\ k\in \mathbf{Z}\},$$
$$S_2=\{\alpha \mid \alpha=(2k+1)\cdot 180°,\ k\in \mathbf{Z}\},$$

因为$\{m \mid m=2k,\ k\in \mathbf{Z}\}\cup\{m \mid m=2k+1,\ k\in \mathbf{Z}\}=\mathbf{Z}$，所以

$$S=S_1\cup S_2=\{\alpha \mid \alpha=m\cdot 180°,\ m\in \mathbf{Z}\},$$

即集合 S 是终边在 x 轴上的角的集合.

例 4 的结果也可从直观上来理解：零角的终边在 x 轴上，零角的终边旋转 $180°$，$-180°$，$2\times180°$，$2\times(-180°)$，…，终边仍会落在 x 轴上. 于是，可以直接写出终边在 x 轴上的角的集合为

$$\{\alpha \mid \alpha=k\cdot 180°,\ k\in \mathbf{Z}\}.$$

想一想

如果 α 是第二象限角，则 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？

练习A

1. 求下列各式的值，并作图说明运算的几何意义.
   (1) $90°+(-60°)$；　(2) $60°-180°$；　(3) $-60°+270°$.
2. 在平面直角坐标系中作下列各角的终边.
   (1) $855°$；　(2) $-750°$.
3. 在 $0°\sim360°$内，找出与下列各角终边相同的角，并说明它们所在的象限.
   (1) $-45°$；　(2) $760°$；　(3) $-480°$.
4. 分别写出与下列各角终边相同的角的集合 S，并把 S 中满足不等式$-360°\leqslant\alpha<720°$的元素 α 写出来.
   (1) $100°$；　(2) $-120°$；　(3) $-380°20'$.
5. 判断以下说法是否正确（均指在平面直角坐标系中，始边在 x 轴正半轴上）.
   (1) 第一象限角一定是锐角；　(2) 终边相同的角一定相等；
   (3) 小于 $90°$的角一定是锐角；　(4) 钝角的终边在第二象限.

练习B

1. 分别写出终边在 y 轴正半轴、y 轴负半轴和 y 轴上的角的集合.
2. 分别写出终边在直线 $y=x$ 上和终边在直线 $y=-x$ 上的角的集合.
3. 在平面直角坐标系中，集合 $S=\{\beta \mid \beta=k\cdot 90°,\ k\in \mathbf{Z}\}$中的元素所表示的角的终边在哪些位置？
4. 分别写出终边在第二、第三、第四象限的角的集合.
5. 今天是星期一，那么从明天算起，第 $7k$ $(k\in \mathbf{N}_+)$天是星期几？第 100 天是星期几？

1 二　2 四　3 α　4 180°　5 0，1 或 2

7.1.2 弧度制及其与角度制的换算

在日常生活以及各学科中，一个量可用不同的标准来度量，从而也就有了不同的单位以及单位之间的换算. 例如，长度既可以用米、厘米来度量，也可以用尺、寸来度量；面积可以用平方米来度量，也可以用亩来度量. 类似地，角除了使用角度来度量外，还可以使用本小节我们要学习的弧度来度量.

1. 弧度制

使用角度来度量角时，是把圆周等分成 360 份，其中每一份所对应的圆心角为 1 度，这种用度作单位来度量角的制度称为**角度制**. 角度制还规定 1 度等于 60 分，1 分等于 60 秒，即

$$1^\circ=60',\ 1'=\boxed{1}\_\_\_\_.$$

使用角度来度量角，其关键是“等分”. 考虑到面积、体积等都可以通过线的长度来刻画，那么，能否用“测量长度”来代替“等分”，从而引进另外一种度量角的制度呢?

情境与问题

如图 7-1-7 是一种折叠扇. 折叠扇打开、合拢的过程可以抽象成扇形圆心角的变大、变小. 那么在这个过程中，扇形的什么量在发生变化? 什么量没发生变化? 由此你能想到度量角的其他办法吗?

图 7-1-7

将折叠扇抽象为如图 7-1-8(1)所示的图形，可以看出，弧 AB 与弧 $A'B'$ 都与角 α 对应，但 $\alpha\neq0^\circ$时，它们的弧长 $\overset{\frown}{AB}$ 与 $\overset{\frown}{A'B'}$ 始终不相等，其原因在于 $OA\neq OA'$.

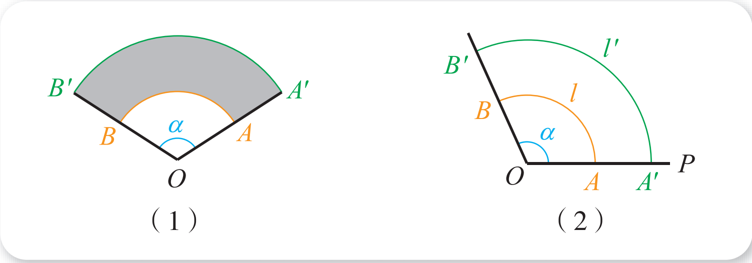


图 7-1-8

一般地，如果角 α 是由射线 OP 绕它的端点旋转形成的，如图 7-1-8(2) 所示，则在旋转的过程中，射线上的任意一点（端点除外）必然形成一条圆弧，不同的点所形成的圆弧长度不同，但这些圆弧都对应同一个角 α. 可以猜想，这些弧的长与弧所在圆的半径的比值是一个常数，即

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{OA}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{OA'}=\cdots=\text{定值}.$$

事实上，设 $\alpha=n^{\circ}$，弧 AB 的长为 l，半径 $OA=r$，则 $l=\dfrac{n}{360}\cdot 2\pi r$，因此

$$\frac{l}{r}=n\cdot\frac{2\pi}{360}.$$

这个等式右端不包含半径，这表示弧长比半径的值不依赖于半径，而只与 α 的大小有关. 我们称弧长与半径比值的这个常数为圆心角的弧度数. 因此，长度等于半径长的圆弧所对的圆心角为 **1 弧度**的角，记作 1 rad. 如图 7-1-9 所示，因为 $\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半径 r，所以 $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角.

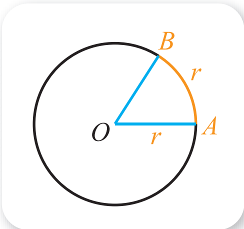


图 7-1-9

如前所述，这样规定出来的 1 弧度的角大小是完全确定的，这种以弧度为单位来度量角的制度称为**弧度制**.

由弧度制的定义可知，在半径为 r 的圆中，若弧长为 l 的弧所对的圆心角为 α rad，则

$$\boxed{\alpha=\frac{l}{r}.}$$

由此也可得到 $l=$ 2 ____，即弧长等于其所对应的圆心角的弧度数与半径的积.

今后我们在用弧度制表示角时，“弧度”二字或 rad 可以略去不写，而只写这个角对应的弧度数. 例如，$\alpha=2$ 表示 α 是 2 rad 的角；$\sin\dfrac{\pi}{3}$ 表示 $\dfrac{\pi}{3}$ rad 的角的正弦.

想一想

弧度制与角度制的区别是什么？请查阅资料，思考一下引入弧度制的意义是什么.

2. 弧度制与角度制的换算

尝试与发现

（1）按照定义，一个周角对应的弧度数应是多少？

（2）一般地，弧度制与角度制之间怎样进行换算？

因为半径为 r 的圆周长为 $2\pi r$，所以周角的弧度数是 $\frac{2\pi r}{r}=2\pi$，于是 $360^\circ=2\pi$ rad，因此

$$\boxed{180^\circ=\pi\ \text{rad}.}$$

由此容易得到弧度制与角度制的换算公式：

设一个角的角度数为 n，弧度数为 α，则

$$\frac{n}{180}=\frac{\alpha}{\pi}.$$

由此不难知道，0 rad 角就是 0°角，它的终边在 x 轴的正半轴上；$\frac{\pi}{2}$ rad 角就是 90°角，它的终边在 y 轴的正半轴上；π rad 角就是 180°角，它的终边在 x 轴的负半轴上；$\frac{3\pi}{2}$ rad 角就是 270°角，它的终边在 y 轴的负半轴上.

例 1 把 30°，45°，60°化成弧度（用 π 表示），并在平面直角坐标系中作出它们的终边.

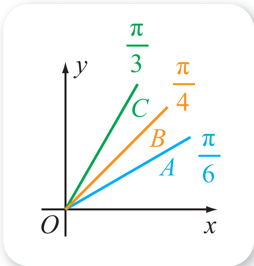


图 7-1-10

解 设 30°角的弧度数为 α，则 $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{30}{180}$，所以 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，即 $30^\circ=\frac{\pi}{6}$，对应的角的终边为图 7-1-10 中的射线 OA.

类似地，有

$$45^\circ=\boxed{3}\_\_\_\_，\quad 60^\circ=\boxed{4}\_\_\_\_，$$

它们的终边分别为 7-1-10 中的射线 OB，OC.

因为 $\frac{\pi}{3}\approx1.05$，所以例 1 说明，1 rad 的角比 60°小.

例 2 把 $\frac{8\pi}{5}$化成角度数.

解 设 $\frac{8\pi}{5}=n^\circ$，则 $\frac{n}{180}=\frac{\frac{8\pi}{5}}{\pi}$，因此 $n=180\times\frac{8}{5}=288$，即 $\frac{8\pi}{5}=288^\circ$.

例 3 利用弧度制推导扇形的面积公式

$$\boxed{S=\frac{1}{2}lr.}$$

其中 l 是扇形的弧长，r 是扇形的半径.

解 设扇形的圆心角为 α rad，则扇形的面积为

$$S=\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}\alpha r^2.$$

又因为 $l=\alpha r$，所以 $S=\frac{1}{2}lr$.

想一想

把扇形的面积公式与三角形的面积公式进行对比，你能得到什么启发?

3. 用信息技术进行弧度制与角度制的换算

科学计算器中，一般都内置有角度制与弧度制互相换算的功能，但是操作步骤等与计算器的型号有关，这里不再详述.

很多计算机软件中，默认度量角度的单位是弧度. 例如，如果在 Excel 的某个单元格中输入“=SIN(30)”，得到的不是 sin 30°的值 0.5，如图 7-1-11 所示.

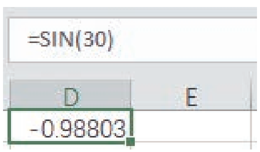


图 7-1-11

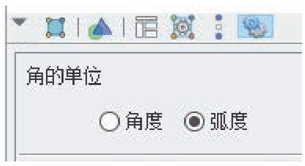


图 7-1-12

在 GeoGebra 中，从“选项”菜单中单击“高级…”之后，可以设定角的单位，如图 7-1-12 所示.

练习A

1. 填表（弧度数用含 π 的代数式表示），并在平面直角坐标系中作出角的终边.

度	0°		90°	135°		180°	225°	270°	315°	360°
弧度		$\frac{\pi}{4}$			$\frac{5}{6}\pi$					

2. 把下列各角度化为弧度（用含 π 的代数式表示）.

(1) $-240°$；　　(2) $-225°$；

(3) $12°$；　　(4) $1\,080°$；

(5) $22°30'$；　　(6) $157.5°$.

3 把下列各弧度化为角度.

（1）$\dfrac{\pi}{12}$；　　（2）$\dfrac{5\pi}{3}$；　　（3）$\dfrac{3\pi}{10}$；

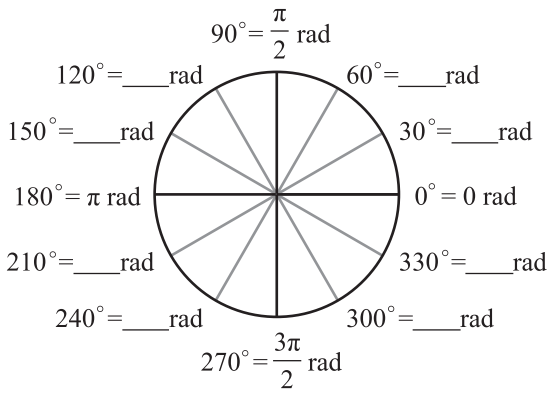
（4）$\dfrac{\pi}{8}$；　　（5）$-\dfrac{3\pi}{2}$；　　（6）$-\dfrac{5\pi}{6}$.

4 时间经过 4 h，时针、分针各转了多少度？各等于多少弧度？

5 已知圆的半径为 0.5 m，分别求 2 rad，3 rad 的圆心角所对的弧长.

练习B

1 在下图中填入适当的值.



（第 1 题）

2 分别写出下列各角所在象限.

（1）1 rad；　　（2）3 rad；　　（3）6 rad.

3 已知半径为 120 mm 的圆上的一条弧长为 144 mm，求此弧所对圆心角的弧度数与角度数.

4 把下列各角化为 $0\sim2\pi$ 的角加上 $2k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）的形式，并指出它们所在的象限.

（1）$\dfrac{23\pi}{6}$；　　（2）$-1\ 500^\circ$；　　（3）$-\dfrac{18\pi}{7}$；　　（4）$672^\circ3'$.

5 一条弦的长度等于半径，这条弦所对的圆心角是多少弧度？

6 在半径为 5 cm 的扇形中，圆心角为 2 rad，求扇形的面积.

7 使用计算器或计算机软件，把下列各角度化为弧度，把弧度化为角度（精确到 0.000 1）.

（1）83°，138°，278°；　　（2）1.2，3.6，5.

8 写出由一个角的弧度数计算这个角的角度数的算法，并使用软件去实践.

1　$60''$　　2　αr　　3　$\dfrac{\pi}{4}$　　4　$\dfrac{\pi}{3}$

习题7-1A

1. 在平面直角坐标系中，角 α_1，α_2，α_3，α_4 的终边分别经过点 $P_1(1，2)$，$P_2(-2，1)$，$P_3(-4，-5)$，$P_4(5，-6)$，则 α_1，α_2，α_3，α_4 分别是第几象限角？

2. 角 $\dfrac{19\pi}{6}$ 和 $-\dfrac{25\pi}{6}$ 分别是第几象限角？分别写出与它们终边相同的角的集合.

3. 把下列各角度化为弧度，并写成 $0\sim2\pi$ 的角加上 $2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 的形式.

   (1) $-64°$； (2) $400°$；

   (3) $-722°30'$.

4. 航海罗盘将圆周 32 等分，如图所示，把其中每一份所对圆心角的大小分别用角度和弧度表示出来.

（第 4 题）

5. 要在半径 $OA=100$ cm 的圆形板上，沿半径 OA，OB 截取一块扇形板，使弧 AB 的长为 112 cm，则截取的圆心角 $\angle AOB$ 的度数是多少（精确到 $1°$）？

习题7-1B

1. 已知 $200°$ 的圆心角所对的弧长为 50 m，则这个圆的半径是多少？

2. 当时钟显示 3 时、6 时和 8 时的时候，把时针作为角的始边，写出分针与时针所成角的大小.

3. 某飞轮直径为 1.2 m，每分钟按照逆时针方向旋转 300 圈，求

   (1) 飞轮每分钟转过的弧度数；

   (2) 飞轮圆周上的一点每秒钟经过的弧长.

4. 用弧度制分别写出第一、二、三、四象限角的集合.

5. 在平面直角坐标系中，集合 $S=\left\{\alpha\,\middle|\,\alpha=\dfrac{2k\pi}{3}，k\in\mathbf{Z}\right\}$ 的元素所表示的角的终边在哪些位置？

7.2　任意角的三角函数

7.2.1　三角函数的定义

1. 任意角的正弦、余弦与正切的定义

尝试与发现

初中的时候我们学过，在一个直角三角形中，如果锐角 α 的对边为 a，邻边为 b，斜边为 c，则有

$$\sin\alpha=\frac{a}{c},\quad \cos\alpha=\frac{b}{c},\quad \tan\alpha=\boxed{1}\underline{\qquad\quad}.$$

当 α 是一个锐角时，上述正弦、余弦与正切，能否通过 α 终边上的点的坐标来定义呢？这种定义的方式能否推广到任意角？

当 α 是锐角时，它的终边在第一象限内．如图 7-2-1 所示，在 α 终边上任取一个不同于坐标原点的点 $P(x,\ y)$，作 PM 垂直 Ox 于点 M，记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则$\triangle OMP$ 是一个直角三角形，且 $OM=x$，$PM=y$，$OP=r$，由此可知

$$\sin\alpha=\frac{PM}{OP}=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{OM}{OP}=\frac{x}{r},\quad \tan\alpha=\frac{PM}{OM}=\frac{y}{x}.$$

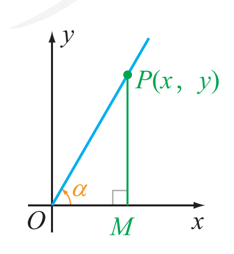


图 7-2-1

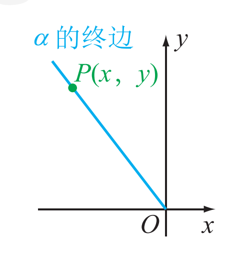


图 7-2-2

可以看出，任意角的正弦、余弦与正切可以用类似的方式定义．如图 7-2-2 所示，对于任意角 α 来说，设 $P(x,\ y)$是 α 终边上异于原点的任意一

点，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，则由三角形相似的知识可知$\frac{y}{r}$与$\frac{x}{r}$跟 P 在 α 终边上的位置无关，只与角 α 终边的位置有关. 一般地，称$\frac{y}{r}$为角 α 的**正弦**，记作 $\sin\alpha$；称$\frac{x}{r}$为角 α 的**余弦**，记作 $\cos\alpha$. 因此

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \cos\alpha=\frac{x}{r}.}$$

当角 α 的终边不在 y 轴上时，同样可知$\frac{y}{x}$与点 P 在 α 终边上的位置无关，此时称$\frac{y}{x}$为角 α 的**正切**，记作 $\tan\alpha$，即

$$\boxed{\tan\alpha=\frac{y}{x}.}$$

由上可知，对于每一个角 α，都有唯一确定的正弦、余弦与之对应；当 $\alpha\neq$ 2 ________ $(k\in\mathbf{Z})$ 时，有唯一的正切与之对应. 角 α 的正弦、余弦与正切，都称为 α 的三角函数.

例 1 已知角 α 的终边经过点 $P(2,\ -3)$，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha$.

解 设 $x=2$，$y=-3$，则 $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$. 于是

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-3}{\sqrt{13}}=-\frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$\tan\alpha=$ 3 ________.

例 2 求下列各角的正弦、余弦和正切.

（1）0；　　（2）π；　　（3）$\frac{3\pi}{2}$.

解 （1）角 0 的终边在 x 轴正半轴上，在 x 轴的正半轴上取点$(1,\ 0)$，所以 $r=\sqrt{1^2+0^2}=1$，因此

$$\sin 0=\frac{0}{1}=0,\quad \cos 0=\frac{1}{1}=1,\quad \tan 0=\frac{0}{1}=0.$$

（2）角 π 的终边在 x 轴负半轴上，在 x 轴的负半轴上取点$(-1,\ 0)$，所以 $r=\sqrt{(-1)^2+0^2}=1$，因此

$$\sin\pi=\frac{0}{1}=0,\quad \cos\pi=\frac{-1}{1}=-1,\quad \tan\pi=\frac{0}{-1}=0.$$

（3）角$\frac{3\pi}{2}$的终边在 y 轴负半轴上，在 y 轴的负半轴上取点$(0,\ -1)$，所以 $r=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$，因此

$$\sin\frac{3\pi}{2}=\boxed{4}\_\_\_\_\_\_,\ \cos\frac{3\pi}{2}=\boxed{5}\_\_\_\_\_\_,\ \tan\frac{3\pi}{2}\text{不存在}.$$

例 3 求$\frac{5\pi}{6}$的正弦、余弦和正切.

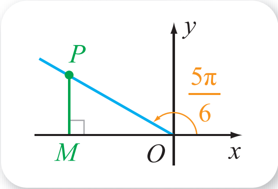


图 7-2-3

解 如图 7-2-3 所示，在$\frac{5\pi}{6}$的终边上取点 P，使得 $OP=2$. 作 $PM\perp Ox$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle OMP$ 中，

$$\angle POM=\pi-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}.$$

因此 $MP=1$，$OM=\sqrt{3}$，从而可知 P 的坐标为$(-\sqrt{3},\ 1)$，因此

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \cos\frac{5\pi}{6}=\boxed{6}\_\_\_\_\_\_,\ \tan\frac{5\pi}{6}=\boxed{7}\_\_\_\_\_\_.$$

2. 正弦、余弦与正切在各象限的符号

尝试与发现

从定义与实例都可以看出，任意角的正弦、余弦与正切，都既有可能是正数，也有可能是负数，还可能为 0. 它们的符号与什么有关？试总结出任意角的正弦、余弦与正切符号的规律.

如果 $P(x,\ y)$是 α 终边上异于原点的任意一点，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$，由 $r>0$ 可知，$\sin\alpha$ 的正负与 α 终边上点的纵坐标的符号相同，所以，当且仅当 α 的终边在第一、二象限，或 y 轴正半轴上时，$\sin\alpha>0$；当且仅当 α 的终边在第三、四象限，或 y 轴负半轴上时，$\sin\alpha<0$.

用类似方法可以得到：

当且仅当 α 的终边在第一、四象限，或 x 轴正半轴上时，$\cos\alpha>0$；当且仅当 α 的终边在第二、三象限，或 x 轴负半轴上时，$\cos\alpha<0$.

当且仅当 α 的终边在第一、三象限时，$\tan\alpha>0$；当且仅当 α 的终边在第二、四象限时，$\tan\alpha<0$.

以上结果可用图 7-2-4 直观表示.

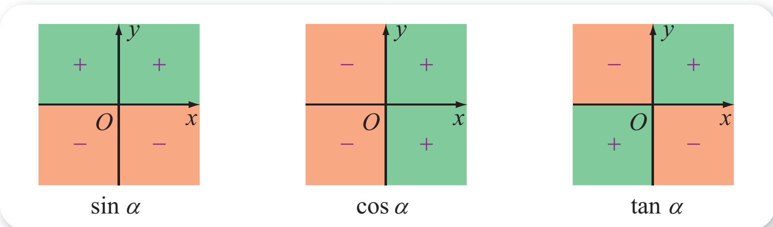


图 7-2-4

例 4 确定下列各值的符号.

(1) $\cos 260°$；　　(2) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$；

(3) $\tan(-672°20')$；　　(4) $\tan\frac{10\pi}{3}$.

解 (1) 因为 $260°$ 是第三象限角，所以 $\cos 260°<0$.

(2) 因为 $-\frac{\pi}{3}$ 是第四象限角，所以 $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)<0$.

(3) 由 $-672°20'=47°40'+(-2)\times 360°$，可知 $-672°20'$ 是第一象限角，所以 $\tan(-672°20')>0$.

(4) 由 $\frac{10\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2\pi$，可知 $\frac{10\pi}{3}$ 是第三象限角，所以 $\tan\frac{10\pi}{3}>0$.

例 5 设 $\sin\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$，确定 θ 是第几象限角.

解 因为 $\sin\theta<0$，所以 θ 的终边在第三、四象限，或 y 轴负半轴上；又因为 $\tan\theta>0$，所以 θ 的终边在第一、三象限.

因此满足 $\sin\theta<0$ 且 $\tan\theta>0$ 的 θ 是第三象限角.

练习A

1. 分别根据下列条件，求各角的正弦、余弦和正切.

(1) 已知角 α 的终边经过点 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$；

(2) 已知角 β 的终边经过点 $Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

(3) 已知角 γ 的终边经过点 $M(-3, -1)$.

2. 求角 $\frac{\pi}{2}$ 的正弦和余弦.

3. 填写下表.

角 α	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
α 的弧度数					
$\sin\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					

4. 确定下列各值的符号.

(1) $\sin 156°$；　　(2) $\cos\frac{16\pi}{5}$；　　(3) $\cos(-80°)$；

(4) $\tan\left(-\dfrac{17\pi}{8}\right)$； (5) $\sin\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$； (6) $\tan 556°12'$.

5 填空.

(1) 如果 $\sin\alpha>0$，且 $\cos\alpha<0$，则 α 是第______象限角；

(2) 如果 $\tan\alpha>0$，且 $\cos\alpha<0$，则 α 是第______象限角；

(3) 如果 $\sin\alpha<0$，且 $\tan\alpha<0$，则 α 是第______象限角；

(4) 如果 $\cos\alpha>0$，且 $\sin\alpha<0$，则 α 是第______象限角.

练习B

1 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 α 的终边与以原点为圆心、2 为半径的圆的交点坐标.

2 设 α 是三角形的一个内角，在 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 中，哪些有可能是负值?

3 根据下列条件，确定 θ 是第几象限角.

(1) $\cos\theta$ 与 $\tan\theta$ 异号； (2) $\cos\theta$ 与 $\tan\theta$ 同号；

(3) $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 异号； (4) $\sin\theta$ 与 $\tan\theta$ 同号.

4 已知 $P(x, -1)$在角 α 的终边上，而且 $\cos\alpha=\dfrac{x}{2}$，求 x 和 $\sin\alpha$ 的值.

5 已知角 α 的终边在直线 $y=2x$ 上，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值.

1 $\dfrac{a}{b}$ 2 $k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 3 $\dfrac{y}{x}=-\dfrac{3}{2}$ 4 -1 5 0 6 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 7 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

7.2.2 单位圆与三角函数线

1. 正弦线与余弦线

尝试与发现

我们已经知道，如果 $P(x, y)$是 α 终边上异于原点的任意一点，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$.

如果选取的 P 点坐标满足 $x^2+y^2=1$，则上述正弦与余弦的表达式有什么变化？由此你能给出任意角正弦和余弦的一个直观表示吗?

不难看出，如果 $x^2+y^2=1$，则

$$\sin\alpha=y,\ \cos\alpha=\boxed{1}\underline{\qquad}.$$

因为 $x^2+y^2=1$ 可以化为

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=1,$$

因此 $P(x,\ y)$到原点$(0,\ 0)$的距离为1. 一般地，在平面直角坐标系中，坐标满足 $x^2+y^2=1$ 的点组成的集合称为**单位圆**. 因此，如果角 α 的终边与单位圆的交点为 P，则 P 的坐标为

$$(\cos\alpha,\ \sin\alpha).$$

这就是说，角 α 的余弦和正弦分别等于角 α 终边与单位圆交点的横坐标和纵坐标.

如图 7-2-5 所示，如果过角 α 终边与单位圆的交点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，则 $\overrightarrow{OM}$ 可以直观地表示 $\cos\alpha$：$\overrightarrow{OM}$ 的方向与 x 轴的正方向相同时，表示 $\cos\alpha$ 是正数，且 $\cos\alpha=|\overrightarrow{OM}|$；$\overrightarrow{OM}$ 的方向与 x 轴的正方向相反时，表示 $\cos\alpha$ 是负数，且 $\cos\alpha=-|\overrightarrow{OM}|$. 习惯上，称 $\overrightarrow{OM}$ 为角 α 的**余弦线**. 类似地，图 7-2-5 中的 $\overrightarrow{MP}$ 可以直观地表示 $\sin\alpha$，因此称 $\overrightarrow{MP}$ 为角 α 的**正弦线**.

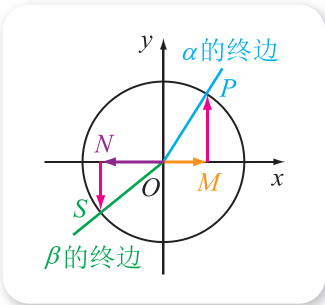


图 7-2-5

利用角的正弦线和余弦线，可以直观地看出角的正弦和余弦的信息. 例如图 7-2-5 中，角 β 的余弦线是 $\overrightarrow{ON}$，正弦线是 $\overrightarrow{NS}$，由此可看出 $\cos\beta<0$，$\sin\beta<0$，而且还可以看出

$$|\cos\beta|>|\cos\alpha|.$$

类似地，可知 $|\sin\alpha|\ \boxed{2}\underline{\qquad}\ |\sin\beta|$.

2. 正切线

尝试与发现

我们已经知道，如果 α 的终边不在 y 轴上，且 $P(x,\ y)$是 α 终边上异于原点的任意一点，则 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$. 你能仿照前面的方法给出正切的一个直观表示吗?

可以看出，如果取坐标满足 $x=1$ 的点 P，则 $\tan\alpha=y$. 因为 $x=1$ 在平面直角坐标系中表示的是垂直于 x 轴且过 $A(1,\ 0)$的直线 l，所以如果角

α 的终边与直线 l 的交点为 $P(1，y)$，则 $\tan\alpha=$ **3** ______.

如图 7-2-6 所示，设角 α 的终边与直线 $x=1$ 交于点 T，则 $\overrightarrow{AT}$ 可以直观地表示 $\tan\alpha$，因此 $\overrightarrow{AT}$ 称为角 α 的**正切线**.

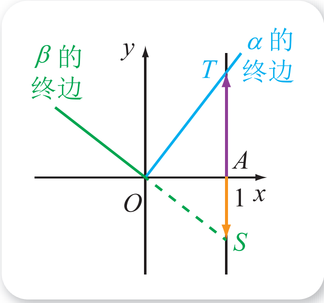


图 7-2-6

不难看出，当角的终边在第二、三象限或 x 轴的负半轴上时，终边与直线 $x=1$ 没有交点，但终边的反向延长线与 $x=1$ 有交点，而且交点的纵坐标也正好是角的正切值. 因此图 7-2-6 中角 β 的正切线为 $\overrightarrow{AS}$，而且从图中可以看出

$$\tan\beta<0，\quad |\tan\beta|\ \boxed{4}\ \_\_\_\_\ |\tan\alpha|.$$

这就是说，角 α 的正切等于角 α 终边或其反向延长线与直线 $x=1$ 的交点的纵坐标.

正弦线、余弦线和正切线都称为**三角函数线**.

例 1 作出 $\frac{5\pi}{6}$ 和 $\frac{\pi}{4}$ 的正弦线、余弦线和正切线，并利用三角函数线求出它们的正弦、余弦和正切.

解 如图 7-2-7 所示，在平面直角坐标系中作出单位圆以及直线 $x=1$，单位圆与 x 轴交于点 $A(1，0)$.

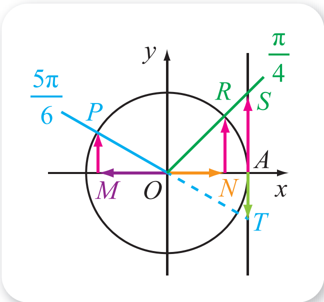


图 7-2-7

作 $\frac{5\pi}{6}$ 的终边与单位圆的交点 P，过 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M；延长线段 PO，交直线 $x=1$ 于 T，则 $\frac{5\pi}{6}$ 的正弦线为 $\overrightarrow{MP}$，余弦线为 $\overrightarrow{OM}$，正切线为 $\overrightarrow{AT}$.

类似可得到 $\frac{\pi}{4}$ 的正弦线为 $\overrightarrow{NR}$，余弦线为 $\overrightarrow{ON}$，正切线为 $\overrightarrow{AS}$.

在图 7-2-7 中，根据直角三角形的知识可知，

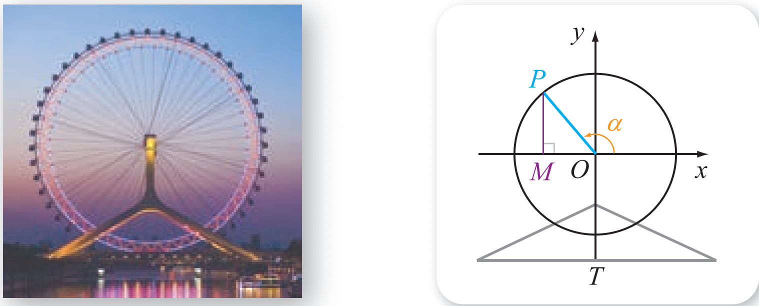
$$MP=\frac{1}{2}，\quad OM=\frac{\sqrt{3}}{2}，\quad AT=\frac{\sqrt{3}}{3}，\quad ON=NR=\frac{\sqrt{2}}{2}，\quad AS=1，$$

所以

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}，\quad \cos\frac{5\pi}{6}=\boxed{5}\ \_\_\_\_，\quad \tan\frac{5\pi}{6}=\boxed{6}\ \_\_\_\_；$$

$$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}，\quad \tan\frac{\pi}{4}=1.$$

例 2 将图 7-2-8(1)所示的摩天轮抽象成图 7-2-8(2)所示的平面图形，然后以摩天轮转轮中心为原点，以水平线为 x 轴，建立平面直角坐标系. 设 O 到地面的高 OT 为 l m，点 P 为转轮边缘上任意一点，转轮半径 OP 为 r m. 记以 OP 为终边的角为 α rad，点 P 离地面的高度为 h m，试用 l，r 与 α 表示 h.



（1）　　　　（2）

图 7-2-8

解 过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，则：

当 α 的终边在第一、二象限或 y 轴正半轴上时，$MP=r\sin\alpha$，此时

$$h=OT+MP=l+r\sin\alpha;$$

当 α 的终边在第三、四象限或 y 轴负半轴上时，因为 $\sin\alpha<0$，所以 $MP=-r\sin\alpha$，此时

$$h=OT-MP=l+r\sin\alpha;$$

当 α 的终边在 x 轴上时，$\sin\alpha=0$，此时

$$h=OT=l+r\sin\alpha.$$

所以，不管 α 的终边在何处，都有

$h=$ 7 ________.

探索与研究

如果一个角大小为 x rad 且 $0<x<\frac{\pi}{2}$，那么 x，$\sin x$，$\tan x$ 都是实数. 请你给出 x 的一个具体值，比较这 3 个实数的大小.

然后想一想，你得到的大小关系是否对区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的任意 x 都成立.

练习A

1. 分别作出下列各角的正弦线、余弦线和正切线.

(1) $\frac{\pi}{3}$；　　(2) $\frac{5\pi}{4}$.

2. 利用三角函数线写出 $\sin\pi$，$\cos\pi$ 和 $\tan\pi$ 的值.

3. 已知 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，利用正弦线比较 $\sin\alpha$ 和 $\sin\beta$ 的大小.

4. 已知 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$，利用正弦线和余弦线比较 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的大小.

5. 以 5 cm 为单位长度作单位圆，分别作出 $10°$，$20°$，$50°$，$220°$，$320°$ 角的正弦线、余弦线和正切线，量出它们的长度，写出这些角的正弦、余弦和正切的近似值，再使用科学计算器求这些角的正弦、余弦和正切，并进行比较.

练习B

1. 分别作出下列各角的正弦线、余弦线和正切线，并利用它们求出各角的正弦、余弦和正切.

(1) $-\frac{2\pi}{3}$；　　(2) $-\frac{13\pi}{6}$.

2. 利用正弦线指出 $\sin\alpha$ 的最大值，并指出 α 为何值时 $\sin\alpha$ 取得最大值.

3. 设 α 是第一象限角，作 α 的正弦线、余弦线和正切线，由图证明下列各等式.

(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；　　(2) $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

如果 α 是第二、三、四象限角，以上等式仍然成立吗？

1 x　2 $>$　3 y　4 $<$　5 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　6 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　7 $l+r\sin\alpha$

7.2.3 同角三角函数的基本关系式

尝试与发现

同一个角的正弦、余弦、正切之间有什么关系？

我们已经知道，如果 $P(x, y)$ 是 α 终边上不同于坐标原点的点，记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\ \cos\alpha=\frac{x}{r},\ \tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

由此可看出

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\\&\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\end{aligned}}$$

这两个关系式也可以从三角函数线得到，一般被称为同角三角函数的基本关系式.

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 α 是第二象限角，求角 α 的余弦和正切.

解 由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得 $\frac{16}{25}+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=$ **1** ______. 因为 α 是第二象限角，$\cos\alpha<0$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5},$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}.$$

例 2 已知 $\tan\alpha=-\sqrt{5}$，且 α 是第二象限角，求角 α 的正弦和余弦.

分析 我们把 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 看成两个未知数，这样只要列出关于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的两个独立的关系式，通过解关于这两个未知数的联立方程组，就可以求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$.

解 由题意和同角三角函数的基本关系式，有

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1, & ①\\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\sqrt{5}. & ②\end{cases}$$

由②得 $\sin\alpha=-\sqrt{5}\cos\alpha$，代入①整理得 $6\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=\frac{1}{6}$.

因为 α 是第二象限角，所以 $\cos\alpha=$ **2** ______，代入②式得

$$\sin\alpha=-\sqrt{5}\cos\alpha=(-\sqrt{5})\times\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=\frac{\sqrt{30}}{6}.$$

例 3 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，求 $\tan\alpha$ 的值.

解 由题意和同角三角函数的基本关系式，有

$$\begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{5},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.\end{cases}$$

消去 $\sin\alpha$，得 $5\cos^2\alpha-\sqrt{5}\cos\alpha-2=0$，解得

$$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}\text{或}\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

当 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，可得 $\sin\alpha=$ **3** ______，此时 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}$；

当 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时，可得 $\sin\alpha=$ **4** ______，此时 $\tan\alpha=$ **5** ______.

例 4 化简 $\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\tan\theta-1}$.

解 原式 $=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-1}=\frac{(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\cos\theta.$

例 5 求证：

（1）$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1$；（2）$\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$；

（3）$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

尝试与发现

怎样证明一个恒等式？你能给出上面这些恒等式的证明过程吗？

证明 （1）原式左边 $=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)$

$$=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$$
$$=\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)$$
$$=2\sin^2\alpha-1=\text{右边},$$

因此

$$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=2\sin^2\alpha-1.$$

（2）原式右边 $=\tan^2\alpha(1-\cos^2\alpha)$

$$=\tan^2\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha$$
$$=\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\text{左边},$$

因此

$$\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha.$$

（3）（方法一）因为

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{(1-\sin\alpha)\cos\alpha}=0,$$

所以

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

（方法二）由题知 $\cos\alpha\neq0$，因而 $\sin\alpha\neq-1$，即 $1+\sin\alpha\neq0$．从而

$$\text{原式左边}=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{1-\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha(1+\sin\alpha)}{\cos^2\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\text{右边},$$

因此

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

从例 5 可以看出：证明一个三角恒等式，可以从它的任意一边开始，推出它等于另一边；也可以用作差法，证明等式两边之差等于零；还可以先证得另一个等式成立，并由此推出需要证明的等式成立.

拓展阅读

更多三角函数及关系式

除了正弦、余弦与正切之外，在工程、机械等学科中，还经常要用到角的更多三角函数.

事实上，如果 $P(x, y)$是 α 终边上不同于坐标原点的任意一点，记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则 $r>0$，此时

(1) 称$\dfrac{r}{x}$为 α 的正割，记作 $\sec\alpha$，即

$$\sec\alpha=\frac{r}{x};$$

(2) 称$\dfrac{r}{y}$为 α 的余割，记作 $\csc\alpha$，即

$$\csc\alpha=\frac{r}{y};$$

(3) 称$\dfrac{x}{y}$为 α 的余切，记作 $\cot\alpha$，即

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}.$$

由上述定义可知，当 α 的终边在 y 轴上时，$\sec\alpha$ 没有意义；当 α 的终边在 x 轴上时，$\cot\alpha$，$\csc\alpha$ 没有意义.

同样地，我们可以借助向量得到正割线、余割线、余切线等三角函数线，请感兴趣的读者自己探讨.

正割、余割、余切也称为角 α 的三角函数，从上述定义可以看出，在各三角函数都有意义的前提下，它们实际上分别是余弦、正弦和正切的倒数，即

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}.$$

另外，由于

$$\tan^2\alpha+1=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha,$$

因此

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha.$$

类似地，还能得到

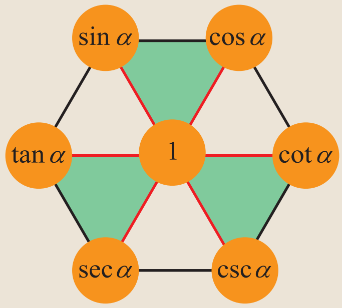
$$\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha.$$

习惯上，人们经常借助如下页图所示的六边形图形来记忆三角函数的基本关系式以及上述三角函数关系式：图中六边形的每一条红色对角线上的两个元素之积为 1，即

$$\cos\alpha\sec\alpha=1,$$

$$\sin\alpha\csc\alpha=1,$$

$\tan\alpha\cot\alpha=1.$



每一个倒立的绿色正三角形中，上方两个顶点元素的平方和等于下方顶点元素的平方，即 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 等.

你能从图中发现更多的关系吗？尝试一下吧！

练习A

1 求解下列各题.

(1) 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，且 α 为第一象限角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$；

(2) 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$，且 α 为第三象限角，求 $\sin\alpha$，$\tan\alpha$；

(3) 已知 $\tan\alpha=-\dfrac{3}{4}$，且 α 为第四象限角，求 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$；

(4) 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，且 α 为第二象限角，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$.

2 化简.

(1) $\cos\theta\tan\theta$；　　(2) $(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$.

3 求证：

(1) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$；　　(2) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

4 化简.

(1) $(1+\tan^2\alpha)\cos^2\alpha$；　　(2) $\sin^2\alpha+\tan^2\alpha\cos^2\alpha$.

5 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，求 $\sin\alpha$ 的值.

练习B

1 已知 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，求 $\sin\theta$ 和 $\tan\theta$.

2 已知 $\tan\alpha=-4$，求下列各式的值.

(1) $\sin^2\alpha$；　　(2) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$；

(3) $3\sin\alpha\cos\alpha$；　　(4) $\dfrac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}$.

③ 已知 $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$，求 $\cos\theta$ 和 $\tan\theta$.

④ 化简.

(1) $\dfrac{2\cos^2\theta-1}{1-2\sin^2\theta}$； (2) $\sin\alpha\cos\alpha\left(\tan\alpha+\dfrac{1}{\tan\alpha}\right)$.

⑤ 求证：$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\dfrac{2\sin^2\alpha}{\tan\alpha}$.

1 $\dfrac{9}{25}$ 2 $-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 3 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 4 $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 5 $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$

7.2.4 诱导公式

在初中，我们已经知道一些锐角的三角函数值及它们之间的一些关系，例如，

$$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2},\ \sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

这里我们将研究任意角的三角函数值之间的一些特殊关系.

情境与问题

如果已知 $\sin 26^\circ=m$，你能用 m 表示出 $\sin 386^\circ$，$\sin(-26^\circ)$，$\sin 154^\circ$，$\sin 206^\circ$，$\cos 64^\circ$吗？你还能用 m 表示出更多角的三角函数值吗？

情境中的问题，与本小节所要学习的诱导公式有关.

1. 角 α 与 $\alpha+k\cdot 2\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$ 的三角函数值之间的关系

尝试与发现

对于任意一个角 α 来说，α 与 $\alpha+k\cdot 2\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$的终边有什么关系？由此你能得到它们的正弦、余弦、正切之间的关系吗？

我们知道，一个角的三角函数值由它终边上的点决定，由此可知，终边相同的角，同名三角函数值相等（“同名”指同是正弦、余弦或正切，下同）．不难看出，α 与 $\alpha+k\cdot 2\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）的终边相同，所以当 k 为整数时，有

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+k\cdot 2\pi)&=\sin\alpha,\\ \cos(\alpha+k\cdot 2\pi)&=\cos\alpha,\\ \tan(\alpha+k\cdot 2\pi)&=\tan\alpha.\end{aligned}} \qquad ①$$

利用上述公式①，我们可以把绝对值大于 2π 的任意角的三角函数值问题转化为 $0\sim 2\pi$ 角的同名三角函数值问题．

例如，$\sin 386^\circ=\sin(26^\circ+360^\circ)=$ **1** ______．

例 1 求下列各值．

（1）$\sin\dfrac{13\pi}{2}$；　　（2）$\cos\dfrac{19\pi}{3}$；　　（3）$\tan 405^\circ$．

解 （1）$\sin\dfrac{13\pi}{2}=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+6\pi\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$．

（2）$\cos\dfrac{19\pi}{3}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+6\pi\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$．

（3）$\tan 405^\circ=\tan(45^\circ+360^\circ)=$ **2** ______．

2. 角的旋转对称

如图 7-2-9 所示，假设角 α 的终边是 OA，射线 OB 和 OC 关于 OA 对称，$\angle AOB=\theta$，那么射线 OB 是角 $\alpha+\theta$ 的终边，射线 OC 是角 $\alpha-\theta$ 的终边．由此我们可知，角 $\alpha+\theta$ 的终边和角 $\alpha-\theta$ 的终边关于角 α 的终边所在的直线对称．

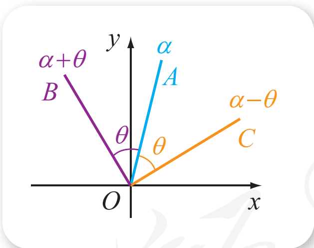


图 7-2-9

一般地，角 α 的终边和角 β 的终边关于角 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 的终边所在的直线对称．

例如，α 和 $-\alpha$ 的终边关于角 $\dfrac{\alpha+(-\alpha)}{2}=0$ 的终边所在的直线（即 x 轴）对称；α 和 $\pi-\alpha$ 的终边关于角 $\dfrac{\alpha+(\pi-\alpha)}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ 的终边所在的直线（即 y 轴）对称；α 和 $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边关于角 $\dfrac{\alpha+\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2}=\dfrac{\pi}{4}$ 的终边所在的直线（即直线 $y=x$）对称．

3. 角 α 与 $-\alpha$ 的三角函数值之间的关系

尝试与发现

对于任意一个角 α 来说，α 与 $-\alpha$ 的终边有什么关系？由此你能得到它们的正弦、余弦、正切之间的关系吗？

如图 7-2-10 所示，设 α 和 $-\alpha$ 的终边与单位圆分别交于 P 和 P'，则

$$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha),$$

$$P'(\cos(-\alpha),\ \sin(-\alpha)).$$

又由 α 和 $-\alpha$ 的终边关于角 0 的终边（即 x 轴的正半轴）所在的直线对称可知，P 和 P' 关于 x 轴对称，因此

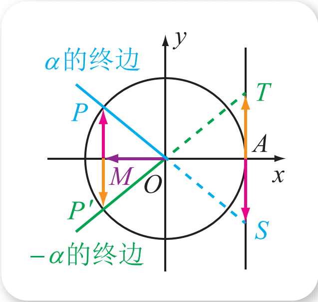


图 7-2-10

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\\&\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\\&\tan(-\alpha)=-\tan\alpha.\end{aligned}} \qquad ②$$

这一结论也可从 α 和 $-\alpha$ 的三角函数线之间的关系看出，请读者参考图 7-2-10 自己完成.

利用公式②，我们可以用正角的三角函数值表示负角的三角函数值.

例如，$\sin(-26^\circ)=$ 3 ________.

例 2 求下列各值.

（1）$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$；（2）$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$；（3）$\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$；（4）$\sin\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)$.

解 （1）$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$.

（2）$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（3）$\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

（4）$\sin\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)=-\sin\dfrac{7\pi}{3}=-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi\right)=-\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. 角α与$\pi\pm\alpha$的三角函数值之间的关系

尝试与发现

对于任意一个角 α 来说，α 与 $\pi-\alpha$ 的终边有什么关系？由此你能得到它们的正弦、余弦、正切之间的关系吗？

如图 7-2-11 所示，设 α 和 $\pi-\alpha$ 的终边与单位圆分别交于 P 和 P'，则

$$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha),$$
$$P'(\cos(\pi-\alpha),\ \sin(\pi-\alpha)).$$

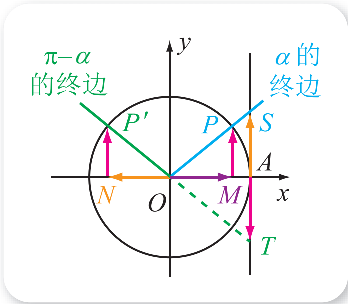


图 7-2-11

又由 α 和 $\pi-\alpha$ 的终边关于角 $\frac{\pi}{2}$ 的终边所在的直线对称可知，P 和 P'关于 y 轴对称，因此

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\\&\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\\&\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha.\end{aligned}} \qquad ③$$

这一结论也可从 α 和 $\pi-\alpha$ 的三角函数线之间的关系看出，请读者参考图 7-2-11 自己完成.

例如，$\sin 154^\circ=\sin(180^\circ-26^\circ)=$ 4 ______.

另外，由公式②③，我们可证明

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha,\\&\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,\\&\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha.\end{aligned}} \qquad ④$$

这是因为

$$\sin(\pi+\alpha)=\sin[\pi-(-\alpha)]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

其余两式的证明请读者自己完成.

例 3 求下列各值.

（1）$\sin\frac{5\pi}{6}$；　　（2）$\cos\frac{3\pi}{4}$；　　（3）$\tan\frac{8\pi}{3}$.

解 （1）$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

（2）$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（3）$\tan\frac{8\pi}{3}=\tan\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi\right)=\tan\frac{2\pi}{3}=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

例 4 求下列各值.

（1）$\sin\frac{4\pi}{3}$；　　（2）$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$；　　（3）$\tan\frac{7\pi}{6}$.

解 （1）$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2）$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\frac{7\pi}{6}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（3）$\tan\frac{7\pi}{6}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 5 化简 $\frac{\sin(2\pi-\alpha)\tan(\pi+\alpha)\tan(-\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\tan(3\pi-\alpha)}$.

解 原式 $=\frac{\sin(-\alpha)\tan\alpha[-\tan(\pi+\alpha)]}{(-\cos\alpha)\tan(\pi-\alpha)}$

$=\frac{(-\sin\alpha)\tan\alpha(-\tan\alpha)}{(-\cos\alpha)(-\tan\alpha)}$

$=\tan\alpha\tan\alpha=\tan^2\alpha$.

5. 角 α 与 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的三角函数值之间的关系

尝试与发现

在初中，我们已经知道两个锐角之和为 90° 时正弦和余弦之间的关系．如图 7-2-12 所示，因为 α 与 β 中，与一个角相邻的直角边是另一个角相对的直角边，所以

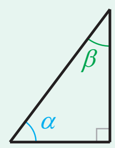


图 7-2-12

$$\sin\alpha=\cos\beta，\cos\alpha=\sin\beta.$$

那么，这一关系式对任意角是否也成立呢？你能通过考察 α 与 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边之间的关系来得出一般结论吗？

如图 7-2-13 所示，设 α 和 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边与单位圆分别交于 P 和 P'，则

$P(\cos\alpha，\sin\alpha)$，

$P'\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)，\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$.

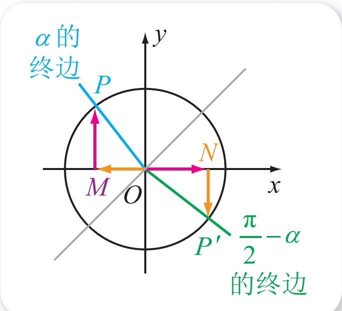


图 7-2-13

又由 α 和 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的终边关于角 $\frac{\pi}{4}$ 的终边所在的直线对称可知，P 和 P' 关于 $y=x$ 对称，因此

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\cos\alpha,\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\sin\alpha.\end{aligned}} \qquad ⑤$$

这一结论也可从 α 和 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的三角函数线之间的关系看出，请读者参考图 7-2-13 自己完成.

6. 其他一些三角函数值之间的关系

由公式②⑤，我们可证明

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=\cos\alpha,\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)&=-\sin\alpha.\end{aligned}} \qquad ⑥$$

这是因为

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right]=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha.$$

另外一个式子可以用类似方法证明.

类似地，我们还可得到

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)&=\sin\alpha,\\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)&=-\cos\alpha.\end{aligned}} \qquad ⑦$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)&=-\sin\alpha,\\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)&=-\cos\alpha.\end{aligned}} \qquad ⑧$$

⑦⑧的证明请读者自己完成.

公式①～⑧都称为**诱导公式**.

利用诱导公式可以求三角函数式的值或化简三角函数式，诱导公式本身还反映了我们后面要学习的三角函数的性质.

希望同学们能够从角终边的对称性的角度理解并运用诱导公式.

例 6 求下列各值.

（1） $\sin 120°$；（2） $\cos 135°$；（3） $\cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right)$.

解 （1） $\sin 120°=\sin(90°+30°)=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（2） $\cos 135°=\cos(90°+45°)=$ **5** ______.

（3） $\cos\left(-\frac{19\pi}{4}\right)=\cos\frac{19\pi}{4}=\cos\left(\frac{3\pi}{4}+4\pi\right)=\cos\frac{3\pi}{4}$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 7 计算 $\sin(-36°)+\cos 54°+\sin 108°+\cos 162°$的值.

解 原式 $=-\sin 36°+\cos(90°-36°)+\sin(90°+18°)+\cos(180°-18°)$

$=-\sin 36°+\sin 36°+\cos 18°-\cos 18°$

$=0$.

例 8 化简 $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}$.

解 原式 $=\dfrac{(-\cos\alpha)(-\sin\alpha)}{(-\sin\alpha)(-\cos\alpha)}$

$=1$.

练习A

1. 求下列各值.

（1） $\sin 3\pi$；（2） $\sin 18\pi$；（3） $\cos 5\pi$；

（4） $\sin\frac{9\pi}{2}$；（5） $\sin\frac{13\pi}{3}$；（6） $\cos\frac{47\pi}{2}$；

（7） $\cos\frac{101\pi}{4}$；（8） $\tan\frac{37\pi}{6}$；（9） $\tan\frac{17\pi}{4}$.

2. 求下列各值.

（1） $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$；（2） $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$；（3） $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$；

（4） $\sin\frac{3\pi}{4}$；（5） $\cos\frac{5\pi}{6}$；（6） $\tan\frac{2\pi}{3}$；

（7） $\sin\frac{7\pi}{6}$；（8） $\cos\frac{4\pi}{3}$；（9） $\tan\frac{4\pi}{3}$.

3. 将下列三角函数化为 $0°\sim45°$角的三角函数.

（1） $\sin 115°$；（2） $\cos 105°$；（3） $\tan 160°$；（4） $\sin 85°$.

4 将下列三角函数化为 $0\sim\frac{\pi}{4}$ 角的三角函数.

(1) $\cos\frac{\pi}{3}$; (2) $\sin\frac{3\pi}{5}$.

5 化简 $\frac{\cos(\alpha+2\pi)\tan(\pi+\alpha)\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)\tan(\pi-\alpha)}$.

练习B

1 求下列各值.

(1) $\sin\frac{271\pi}{6}$; (2) $\cos\frac{1\,101\pi}{4}$; (3) $\tan\frac{6\,133\pi}{6}$;

(4) $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; (5) $\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; (6) $\tan\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$.

2 证明:

(1) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha$; (2) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha$.

3 化简.

(1) $\frac{\cos(\alpha-\pi)\tan(\alpha-2\pi)\tan(2\pi-\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}$;

(2) $\sin^2(-\alpha)-\tan(360^\circ-\alpha)-\sin(180^\circ-\alpha)\cos(360^\circ-\alpha)\tan(180^\circ+\alpha)$;

(3) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\tan(\pi-\alpha)$.

4 计算下列各式的值.

(1) $\sin 555^\circ+\cos(-435^\circ)$;

(2) $\sin 67^\circ+\cos 157^\circ+\sin 115^\circ-\cos(-25^\circ)$.

5 化简 $\tan 1^\circ\tan 2^\circ\cdots\tan 45^\circ\tan 46^\circ\cdots\tan 88^\circ\tan 89^\circ$.

(提示: $\tan 89^\circ=\frac{\sin 89^\circ}{\cos 89^\circ}=\frac{\sin(90^\circ-1^\circ)}{\cos(90^\circ-1^\circ)}=\frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}=\frac{1}{\tan 1^\circ}$.)

1 $\sin 26^\circ$ 2 $\tan 45^\circ=1$ 3 $-\sin 26^\circ$ 4 $\sin 26^\circ$ 5 $-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

习题7-2A

1. 已知角 α 的终边上一点的坐标为$(-1, 2)$，求 α 的正弦、余弦和正切.

2. 计算.

(1) $5\sin\frac{\pi}{2}+2\cos 0-3\sin\frac{\pi}{2}+10\cos\pi$；

(2) $7\cos 270^\circ+12\sin 0^\circ+2\tan 0^\circ-8\cos 180^\circ$；

(3) $\sin 360^\circ-2\cos 90^\circ+3\sin 180^\circ-4\tan 180^\circ+5\cos 360^\circ$；

(4) $\cos\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\tan^2\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}$；

(5) $\frac{(2\tan^2 30^\circ-1)\cos^2 30^\circ}{2\sin^2 45^\circ+1}$.

3. 用单位圆中的三角函数线说明：对于任意角 α，不等式

$$|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geqslant 1$$

都成立.

4. 试分别确定满足下列条件的角 α 所在的象限.

(1) $\sin\alpha\tan\alpha<0$；　　(2) $\sin\alpha\cos\alpha<0$.

5. 根据下列条件，求角 α 的正弦、余弦、正切中的未知量.

(1) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 α 是第四象限角；

(2) $\tan\alpha=-3$，且 α 是第二象限角；

(3) $\cos\alpha=\frac{12}{13}$，且 α 是第四象限角；

(4) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$.

6. (1) 若$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，化简 $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$；

(2) 若$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，化简 $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$；

(3) 化简 $\sqrt{\sin^2\alpha\left(1+\frac{1}{\tan\alpha}\right)+\cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$；

(4) 化简 $\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\tan\alpha}$.

7. 证明下列恒等式.

(1) $(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha=2-2\cos\alpha$；　(2) $\frac{\tan^2\alpha-\sin^2\alpha}{\tan^2\alpha}=\sin^2\alpha$；

(3) $\frac{1+\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha-1}=\frac{1}{2\sin^2\alpha-1}$.

8. 化简.

(1) $\dfrac{\sin(180^\circ-\alpha)\sin(270^\circ-\alpha)\tan(180^\circ-\alpha)}{\sin(90^\circ+\alpha)\tan(180^\circ+\alpha)\tan(360^\circ-\alpha)}$;

(2) $1+\sin(\alpha-2\pi)\sin(\pi+\alpha)-2\cos^2(-\alpha)$;

(3) $\dfrac{\sqrt{1-2\sin 100^\circ\cos 280^\circ}}{\cos 370^\circ-\sqrt{1-\cos^2 170^\circ}}$;

(4) $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)\tan(5\pi-\alpha)}{\tan(2\pi-\alpha)\cos(-2\pi-\alpha)}$.

习题7-2B

1. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$，求下列各式的值.

(1) $\sin\alpha\cos\alpha$；　　(2) $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$；

(3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$；　　(4) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$.

2. 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$，$\alpha\in(0,\pi)$，求 $\tan\alpha$ 的值.

3. 已知 $\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{8}$，且 $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，求 $\cos\alpha-\sin\alpha$ 的值.

4. 已知 $\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}+\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=-2$，试判断角 θ 所在的象限.

5. 利用单位圆中的正弦线、余弦线说明：对于任意角 α，不等式

$$-1\leqslant\sin\alpha\leqslant1,\quad -1\leqslant\cos\alpha\leqslant1$$

都成立.

6. 已知 $\sin(\pi-\alpha)=\log_8\dfrac{1}{4}$，且 $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，求 $\tan(2\pi-\alpha)$的值.

7. 求 $\dfrac{\tan(-150^\circ)\cos(-210^\circ)\cos(-420^\circ)}{\tan(-690^\circ)\sin(-1\ 050^\circ)}$ 的值.

8. 设 $\cos 460^\circ=t$，将 $\tan 260^\circ$用含 t 的式子表示.

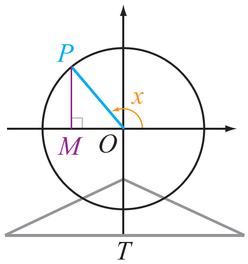
7.3 三角函数的性质与图象

7.3.1 正弦函数的性质与图象

情境与问题

将图 7-3-1(1)所示的摩天轮抽象成图 7-3-1(2)所示的平面图形，然后以摩天轮转轮中心为原点 O，以水平线为横轴，建立平面直角坐标系. 设 O 到地面的高 OT 为 l m，P 点为转轮边缘上任意一点，转轮半径 OP 为 r m. 记以 OP 为终边的角为 x rad，点 P 离地面的高度为 y m，那么 y 是 x 的函数吗？如果是，这个函数有什么性质？

（1）



（2）

图 7-3-1

情境中的问题，可以利用本小节要学习的正弦函数知识解答.

我们已经知道，对于任意一个角 x，都有唯一确定的正弦 $\sin x$ 与之对应，因此 $y=\sin x$ 是一个函数，一般称为**正弦函数**.

利用正弦线可以直观地表示正弦函数的函数值，如图 7-3-2 中，$\overrightarrow{MP}$ 就是角 x 的正弦线.

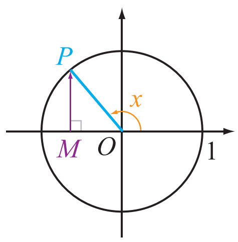


图 7-3-2

1. 正弦函数的性质

尝试与发现

你能由正弦线得出正弦函数 $y=\sin x$ 具有哪些性质吗?

(1) 定义域与值域

因为任意角都有正弦，所以 $y=\sin x$ 的定义域为 1 ______.

由图 7-3-2 的正弦线可以看出，$\overrightarrow{MP}$ 的长度最大是 1，最小是 0. 因此可知 $y=\sin x$ 的值域为 $[-1, 1]$，而且

当且仅当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，函数 $y=\sin x$ 的最大值 $y_{\max}=1$；

当且仅当 $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，函数 $y=\sin x$ 的最小值 $y_{\min}=$ 2 ______.

例 1 已知 $\sin x=t-3$，$x\in\mathbf{R}$，求 t 的取值范围.

解 因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，所以

$$-1\leqslant t-3\leqslant 1,$$

由此解得 $2\leqslant t\leqslant$ 3 ______.

(2) 奇偶性

由诱导公式

$$\sin(-x)=-\sin x$$

可知，正弦函数 $y=\sin x$ 是 4 ______ 函数，其图象关于原点中心对称.

(3) 周期性

由诱导公式

$$\sin(x+k\cdot 2\pi)=\sin x \quad (k\in\mathbf{Z})$$

可知，当自变量 x 的值每增加或减少 2π 的整数倍时，正弦值重复出现，这种性质称为正弦函数的周期性.

一般地，对于函数 $f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得对定义域内的每一个 x，都满足

$$f(x+T)=f(x),$$

那么就称函数 $f(x)$ 为周期函数，非零常数 T 称为这个函数的**周期**.

由上可知，正弦函数 $y=\sin x$ 是一个周期函数，$2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z}, k\neq 0)$ 都是它的周期.

对于一个周期函数 $f(x)$，如果在它的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小的正数就称为 $f(x)$ 的**最小正周期**.

在 $2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z}, k\neq 0)$ 中，最小的正数为 5 ______，因此正弦函数 $y=$

$\sin x$ 的最小正周期为 2π.

今后本书中的周期，如果不加特殊说明，均指最小正周期.

（4）单调性

由 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数可知，我们只要知道正弦函数在一个长度为 2π 的区间内的单调性，就能得到正弦函数在 $\mathbf{R}$ 上的单调性.

由图 7-3-2 中的正弦线可以看出，正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上，从 -1 增大到 1，是递增的；在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上，从 1 减少到 -1，是递减的.

一般地，正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上递增，在 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上递减.

例 2 不求值，比较 $\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$ 和 $\sin\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$ 的大小.

解 因为

$$\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=-\sin\frac{17\pi}{4}=-\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\sin\left(-\frac{23\pi}{5}\right)=-\sin\frac{23\pi}{5}=-\sin\left(4\pi+\frac{3\pi}{5}\right)=-\sin\frac{3\pi}{5}$$

$$=-\sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)=-\sin\frac{2\pi}{5},$$

又因为 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内递增，且 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}<\frac{2\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$，所以

$$\sin\frac{\pi}{4}<\sin\frac{2\pi}{5},$$

因此 $\sin\left(-\frac{17\pi}{4}\right)>\sin\left(-\frac{23\pi}{5}\right)$.

（5）正弦函数的零点

可以看出，正弦函数 $y=\sin x$ 的零点为 $k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

例 3 求下列函数的最大值和最小值，并求出取得最大值和最小值时 x 的值.

（1）$y=\sin x-2$；　　（2）$y=(\sin x-1)^2+2$；

（3）$y=\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+1$.

解 （1）函数 $y=\sin x-2$ 与 $y=\sin x$ 同时取得最大值和最小值，所以，

当 $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$y=\sin x-2$ 取得最大值-1；

当 $x=$ 6 ______ $(k\in\mathbf{Z})$时，$y=\sin x-2$ 取得最小值-3.

(2) 令 $t=\sin x$，则

$$y=(t-1)^2+2,\ t\in[-1,\ 1],$$

于是就转化为求闭区间上二次函数的最大值和最小值问题了.

因为$-1\leqslant t\leqslant 1$ 时，$-2\leqslant t-1\leqslant 0$，所以 $0\leqslant (t-1)^2\leqslant 4$，因此

$$2\leqslant (t-1)^2+2\leqslant 6.$$

从而 $y_{\max}=6$，此时 $t-1=-2$，$t=-1$，即 $\sin x=-1$，$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$；$y_{\min}=2$，此时 $\sin x=$ 7 ______，$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

(3) 令 $t=\sin x$，则

$$y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1,\ t\in[-1,\ 1].$$

因为$-1\leqslant t\leqslant 1$ 时，$-\frac{3}{2}\leqslant t-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，所以 $0\leqslant\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{9}{4}$，因此

$$1\leqslant\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1\leqslant\frac{13}{4}.$$

从而 $y_{\max}=\frac{13}{4}$，此时 $\sin x=-1$，$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$；$y_{\min}=1$，此时 $t-\frac{1}{2}=0$，$t=\frac{1}{2}$，即 $\sin x=\frac{1}{2}$，$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$或 $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

2. 正弦函数的图象

尝试与发现

函数图象直观表示了变量间的变化过程和变化趋势，得到函数图象的主要方法有哪些？前面我们已经系统研究了正弦函数的性质，这对作出正弦函数的图象有什么帮助呢？

我们可以借助科学计算器，通过描点法得到正弦函数的图象.

由 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数可知，只要知道正弦函数在一个长度为 2π 的闭区间内的图象，就可得到正弦函数在 $\mathbf{R}$ 上的图象.

下面我们探讨正弦函数 $y=\sin x$ 在区间$[-\pi,\ \pi]$上的图象.

又因为 $y=\sin x$ 是奇函数，所以 $y=\sin x$ 在$[-\pi,\ 0]$和$[0,\ \pi]$上的图

象关于原点对称，因此只要探讨 $y=\sin x$ 在$[0, \pi]$上的图象即可.

取$[0, \pi]$中的几个值，列表如下.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y=\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

在平面直角坐标系中描点，如图 7-3-3 所示. 又根据 $y=\sin x$ 在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$上递增，在$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$上递减等信息，可知将这些点连接起来，形成光滑的曲线，就可以得到 $y=\sin x$ 在$[0, \pi]$上的函数图象. 然后作这一段图象关于原点对称的图象，最后得到 $y=\sin x$ 在$[-\pi, \pi]$上的图象，如图 7-3-3 所示.

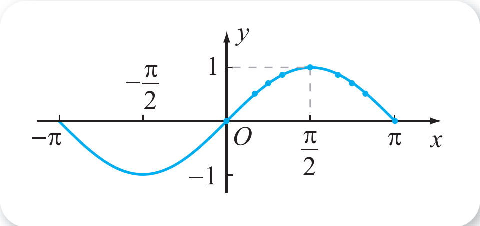


图 7-3-3

由于 $y=\sin x$ 的周期是 2π，所以正弦函数在$[-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$上的函数图象与其在$[-\pi, \pi]$上的函数图象形状完全相同，因此不难得到正弦函数 $y=\sin x$ 的图象，如图 7-3-4 所示.

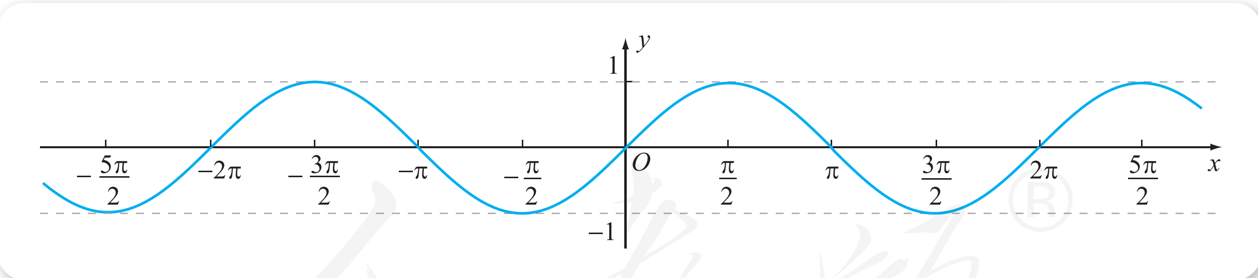


图 7-3-4

一般地，$y=\sin x$ 的函数图象称为**正弦曲线**.

由图 7-3-4 也可以看出，正弦曲线是轴对称图形，对称轴为 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$；正弦曲线也是中心对称图形，且对称中心为 $(k\pi, 0)$ $(k\in\mathbf{Z})$. 另外，这两个结论也可以从关系式 $\sin(\pi+2k\pi-x)=\sin x$ 和 $\sin(2k\pi-x)=-\sin x$ 得到，其中 $k\in\mathbf{Z}$，请读者自己完成.

> **想一想**
>
> 正弦函数 $y=\sin x$ 在对称轴和对称中心处的函数值有什么特征?

正弦函数 $y=\sin x$ 的图象也可由其在$[0, 2\pi]$上的图象得到. 从图 7-3-4 可以看出，以下五个点在确定 $y=\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$的图象形状时起着关

键作用：

$$(0,\ 0),\ \left(\frac{\pi}{2},\ 1\right),\ (\pi,\ 0),\ \left(\frac{3\pi}{2},\ -1\right),\ (2\pi,\ 0).$$

这五个点描出后，$y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$的图象形状就基本上确定了.

今后，我们作正弦曲线的简图时，在精确度要求不高的情况下，一般都是先找出确定图象形状的关键的五个点，然后再描点作图，这种作图方法称为**五点法**.

例 4 用五点法作函数 $y=\sin x+1$，$x\in[0,\ 2\pi]$的图象.

解 找关键的五个点，列表如下.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=\sin x+1$	1	2	1	0	1

描点作图，如图 7-3-5 所示.

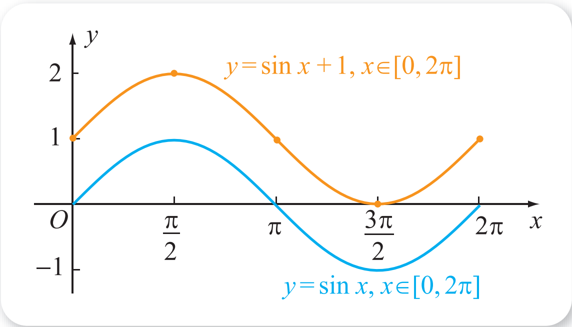


图 7-3-5

由图 7-3-5 可以看出，对于任意一个 $x\in[0,\ 2\pi]$，函数 $y=\sin x+1$ 的函数值比 $y=\sin x$ 的函数值大 1，因此 $y=\sin x+1$，$x\in[0,\ 2\pi]$的图象可由 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$的图象向上平移一个单位得到.

事实上，前述情境与问题中，y 是 x 的函数，而且

$$y=r\sin x+l,$$

它具有与 $y=\sin x+1$ 类似的性质.

3. 用信息技术作正弦曲线

用计算机软件可以方便地作出类似正弦函数的图象，而且也只需要输入函数解析式即可，图 7-3-6 所示是用 GeoGebra 作出的 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\sin x+1$ 的图象.

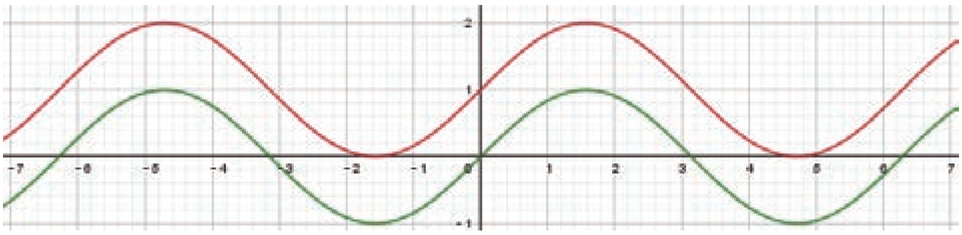


图 7-3-6

练习A

1. 已知 $\sin x+2a+5=0$，$x\in\mathbf{R}$，求 a 的取值范围.

2. 不求值，比较 $\sin\dfrac{31\pi}{5}$ 和 $\sin\dfrac{13\pi}{3}$ 的大小.

3. 求 $y=2\sin x+1$ 的单调递增区间.

4. 求下列函数的最大值和最小值，并求出取得最大值和最小值时 x 的值.

   (1) $y=\sin x+3$；

   (2) $y=(\sin x-3)^2$；

   (3) $y=\left(\sin x+\dfrac{1}{2}\right)^2-3$.

5. 用五点法作出下列函数在 $[0,\ 2\pi]$ 上的图象，并说明它们与 $y=\sin x$，$x\in[0,\ 2\pi]$ 的图象的关系.

   (1) $y=-\sin x$；　　(2) $y=\sin x-1$.

6. 求函数 $y=\sin x-\dfrac{3}{2}$ 的所有零点组成的集合.

7. 利用 $\sin(\pi-x)=\sin x$ 证明：正弦曲线关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称.

练习B

1. 等式 $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{6}$ 是否成立？如果这个等式成立，那么能否说 $\dfrac{2\pi}{3}$ 是正弦函数 $y=\sin x$ 的周期？

2. 求 $y=-3\sin x-4$ 的单调递增区间.

3. 求下列函数的最大值和最小值，并求出取得最大值和最小值时 x 的值.

   (1) $y=-4\sin x+5$；

   (2) $y=\cos^2 x-\sin x+1$.

4 求函数 $y=\sqrt{\frac{1}{2}-\sin x}$ 的定义域、值域和零点.

5 用五点法作出下列函数在$[-2\pi, 0]$上的图象.

(1) $y=1-\sin x$;

(2) $y=\sin(\pi+x)-1$.

6 写出函数 $y=\sin x-2$ 的图象的对称中心和对称轴.

7 写出函数 $y=-3\sin x+1$ 的值域和单调区间.

8 利用 $\sin(2k\pi-x)=-\sin x$，$k\in\mathbf{Z}$ 证明：正弦曲线关于点$(k\pi, 0)$ $(k\in\mathbf{Z})$对称.

1 $\mathbf{R}$　2 -1　3 4　4 奇　5 2π　6 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$　7 1

7.3.2 正弦型函数的性质与图象

情境与问题

如图 7-3-7 所示，将一个有孔的小球装在弹簧的一端，弹簧的另一端固定，小球穿在水平放置的光滑杆上，不计小球与杆之间的摩擦，称小球静止时的位置为平衡位置. 将小球拉离平衡位置之后释放，则小球将左右运动. 从某一时刻开始，如果记 t s 后小球的位移为 x cm，则由物理学知识可知 x 与 t 的关系可以写成

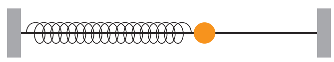


图 7-3-7

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)$$

的形式，其中 A，ω，φ 都是常数.

日常生活中，一般家用电器使用的电流都是交流电流，交流电流 i 与时间 t 的关系一般可以写成

$$i=I_m\sin(\omega t+\varphi)$$

的形式，其中 I_m，ω，φ 都是常数.

显然，上述 x 与 i 都是 t 的函数. 那么，这种类型的函数具有什么性质呢？怎样研究这种类型的函数的性质？

一般地，形如

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)$$

的函数，在物理、工程等学科的研究中经常遇到，这种类型的函数称为**正弦型函数**，其中 A，ω，φ 都是常数，且 $A\neq0$，$\omega\neq0$. 下面我们通过实例来研究这类函数的性质和图象.

例 1 探究函数 $y=2\sin x$ 的定义域、值域和周期性，并作出它在一个周期内的图象.

解 可以看出，函数 $y=2\sin x$ 的定义域为 1 ______.

因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$，所以

$$-2\leqslant2\sin x\leqslant2,$$

又因为 $\sin x=1$ 时，$y=2\sin x=2$；$\sin x=-1$ 时，$y=2\sin x=-2$，所以 $y=2\sin x$ 的值域为 2 ______.

函数 $y=2\sin x$ 是周期函数，周期是 2π.

下面我们用五点法作出 $y=2\sin x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象. 取点列表如下.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=2\sin x$	0	2	0	-2	0

描点作图，如图 7-3-8 所示.

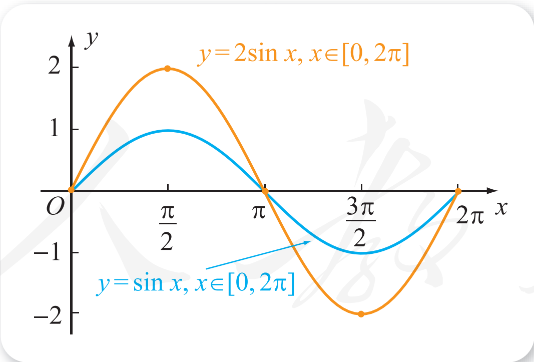


图 7-3-8

由图 7-3-8 可以看出，$y=2\sin x$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象上的点，横坐标保持不变，纵坐标变为原来的 3 ______ 倍得到.

一般地，函数 $y=A\sin x$ $(A\neq0)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-|A|,|A|]$，周期是 2π.

例 2 探究函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域、值域和周期性，并作出它在一个周期内的图象.

解 令 $u=x+\frac{\pi}{3}$，则 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 可以化成 $y=\sin u$.

由 $y=\sin u$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为4 ______，可以看出 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[-1,\ 1]$.

由 $y=\sin u$ 的周期为 2π 可知 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的周期也为 2π.

当 $u\in[0,\ 2\pi]$时，即 $0\leqslant u\leqslant 2\pi$ 时，我们有

$$0\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2\pi，即 -\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{3}，$$

所以下面我们用五点法作出 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}\right]$ 上的图象. 取点列表如下.

x	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$
$u=x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin u=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	1	0	-1	0

描点作图，如图 7-3-9 所示.

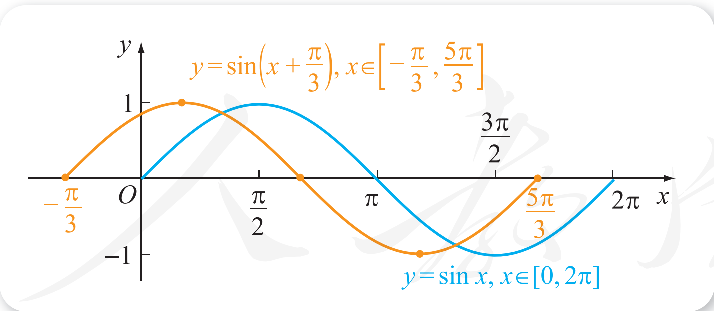


图 7-3-9

由图 7-3-9 可以看出，$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到.

一般地，函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[-1,\ 1]$，周期是 2π.

例 3 探究函数 $y=\sin 2x$ 的定义域、值域和周期性，并作出它在一个周期内的图象.

尝试与发现

怎样探究 $y=\sin 2x$ 的上述性质？

解 令 $u=2x$，则 $y=\sin 2x$ 可以化成 $y=\sin u$.

由 $y=\sin u$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[-1, 1]$，可以看出 $y=\sin 2x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[-1, 1]$.

由 $y=\sin u$ 的周期为 2π 可知，对任意 u，当它增加到且至少要增加到 $u+2\pi$ 时，对应的函数值才重复出现. 因为

$$u+2\pi=2x+2\pi=2(x+\pi),$$

这说明对任意 x，当它增加到且至少要增加到 $x+\pi$ 时，$y=\sin 2x$ 的函数值才重复出现，这就说明 $y=\sin 2x$ 的周期为 π.

当 $u\in[0, 2\pi]$时，即 $0\leqslant u\leqslant 2\pi$ 时，我们有

$$0\leqslant 2x\leqslant 2\pi，即 0\leqslant x\leqslant \pi,$$

所以下面我们用五点法作出 $y=\sin 2x$ 在$[0, \pi]$上的图象. 取点列表如下.

x	0	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	π
$u=2x$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin u=\sin 2x$	0	1	0	-1	0

描点作图，如图 7-3-10 所示.

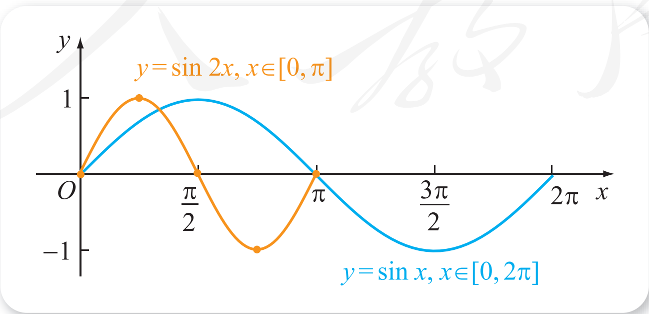


图 7-3-10

由图 7-3-10 可以看出，$y=\sin 2x$ 的图象可由 $y=\sin x$ 的图象上的点，纵坐标不变，横坐标变为原来的$\dfrac{1}{2}$得到.

一般地，函数 $y=\sin\omega x$ $(\omega\neq0)$的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[-1,1]$，周期是$\dfrac{2\pi}{|\omega|}$.

例 4 探究函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的定义域、值域和周期性，并作出它在一个周期内的图象.

解 令 $u=2x+\dfrac{\pi}{3}$，则 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$可以化成 $y=3\sin u$.

由 $y=3\sin u$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[-3,3]$，可以看出 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[-3,3]$.

由 $y=3\sin u$ 的周期为 2π 可知，对任意 u，当它增加到且至少要增加到 $u+2\pi$ 时，对应的函数值才重复出现，因为

$$u+2\pi=2x+\frac{\pi}{3}+2\pi=2(x+\pi)+\frac{\pi}{3},$$

这说明对任意 x，当它增加到且至少要增加到 $x+\pi$ 时，$y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的函数值才重复出现，$y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的周期为 5 ______.

当 $u\in[0,2\pi]$时，即 $0\leqslant u\leqslant2\pi$ 时，我们有

$$0\leqslant2x+\frac{\pi}{3}\leqslant2\pi，即-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6},$$

所以下面我们用五点法作出 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$在$\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$上的图象. 取点列表如下.

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$
$u=2x+\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin u$	0	1	0	-1	0
$y=3\sin u=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$	0	3	0	-3	0

描点作图，如图 7-3-11 所示.

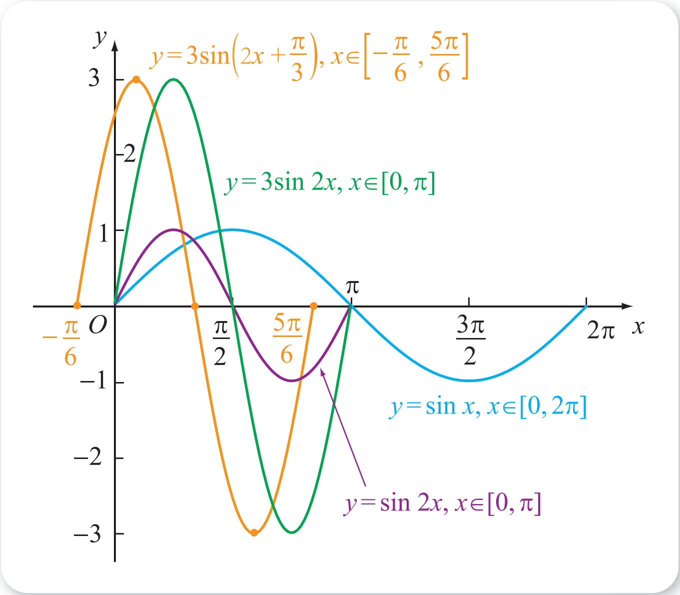


图 7-3-11

在图 7-3-11 中，我们还作出了 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$，$y=3\sin 2x$ 的部分图象，把它们与函数 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象进行比较，就可以看出这些图象之间的关系：把函数 $y=\sin x$ 图象上的所有点，纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，就可得到 $y=\sin 2x$ 的图象；把 $y=\sin 2x$ 图象上的所有点，横坐标不变，纵坐标变为原来的 3 倍，就可得到 $y=3\sin 2x$ 的图象；把 $y=3\sin 2x$ 图象上的所有点，向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，就可得到 $y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

尝试与发现

结合图 7-3-11 思考：是否可以按下列指定的顺序，将一个函数的图象变为下一个函数的图象？

$$y=\sin x \to y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \to y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) \to y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

请说明每个步骤中，函数图象是如何变换的.

事实上，把函数 $y=\sin x$ 图象上的所有点，向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，就可得到 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象；把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象上的所有点，纵坐标不变，横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$，就可得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象；把 $y=$

$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$图象上的所有点，横坐标不变，纵坐标变为原来的 3 倍，就可得到 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象.

一般地，正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ （$A\neq 0$，$\omega\neq 0$）的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为$[-|A|, |A|]$，周期是$\dfrac{2\pi}{|\omega|}$，而且函数的图象可通过对正弦曲线进行平移、伸缩得到.

正弦型函数中的常数 A，ω，φ 都具有一定的实际意义.

事实上，在前述情境与问题的小球运动过程中，如果从 $t=0$ 时刻开始，每隔一小段时间（比如 0.01 s）给弹簧和小球拍一张照片，并将这些照片按时间顺序排成一列（顶端对齐），就可得到如图 7-3-12 所示的图形. 可以认为，图中小球的中心在正弦型函数 $x=A\sin(\omega t+\varphi)$的图象上，而且

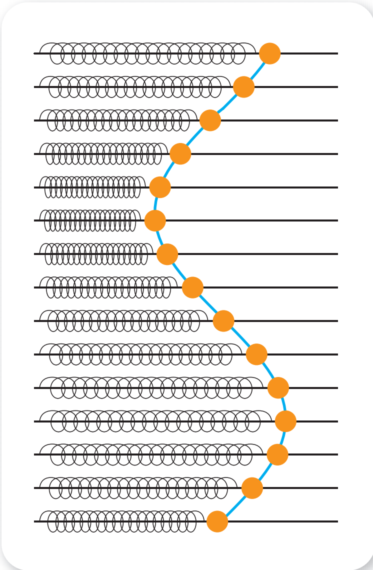


图 7-3-12

（1）$|A|$表示小球能偏离平衡位置的最大距离，称为**振幅**；

（2）φ 在决定 $t=0$ 时小球的位置（即 $A\sin\varphi$）中起关键作用，称为**初相**；

（3）**周期** $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$表示小球完成一次运动所需要的时间.（小球的位置和速度首次都得到重复时称完成了一次运动.）

此时，$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{|\omega|}{2\pi}$表示单位时间内能够完成的运动次数，称为**频率**.

一般正弦型函数的振幅、初相、周期、频率等是用完全一样的方式定义的，这里不再重复.

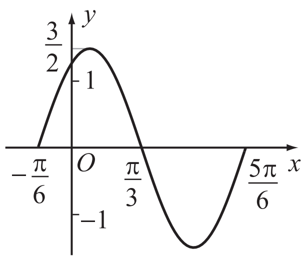
练习A

❶ 求下列函数的周期.

（1）$y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$；　（2）$y=\sin 3x$；

（3）$y=3\sin\dfrac{x}{4}$；　（4）$y=2\sin\left(-2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

❷ 如图是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的部分图象，其中 $A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，试确定这个函数的解析式.



（第 2 题）

3 求 $y=-5\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的最大值和最小值，并求出取得最大值和最小值时 x 的值.

4 说明由函数 $y=\sin x$ 的图象怎样才能得到函数 $y=2\sin 3x$ 的图象.

5 求 $y=3\sin\left(4\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的振幅、初相、周期和频率.

练习B

1 由函数 $y=3\sin\left(x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的图象怎样才能得到函数 $y=3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{5}\right)$ 和 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{5}\right)$ 的图象？

2 函数 $y=\sin x$ 的图象经过怎样的变换能得到函数 $y=2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象？

3 求下列函数的最大值和最小值，并求出取得最大值和最小值时 x 的值.

(1) $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$；　　(2) $y=1-\sin 3x$.

4 求函数 $y=2\sin\left(-2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间.

5 如果被弹簧牵引的小球相对于平衡位置的位移 h cm 与时间 t s 之间的函数关系为 $h=2\sin\left(8\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$t\in[0, +\infty)$，根据表达式回答下列问题.

(1) $t=0$ 时，小球相对平衡位置的位移为多少？

(2) 小球相对平衡位置的最大距离是多少？

(3) 经过多长时间小球完成一次运动？

(4) 小球 1 s 内能运动多少次？

计算机上的练习

利用计算机软件，按照下列各组数据，在同一坐标系中作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象.

(1) $A=1$，$\omega=1$，$\varphi=1$；　　(2) $A=2$，$\omega=1$，$\varphi=1$；

(3) $A=1$，$\omega=1$，$\varphi=2$；　　(4) $A=1$，$\omega=2$，$\varphi=1$.

观察图象，理解 A，ω，φ 对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象变化的影响.

1 **R**　2 $[-2, 2]$　3 2　4 $[-1, 1]$　5 π

7.3.3 余弦函数的性质与图象

因为对于任意一个角 x，都有唯一确定的余弦 $\cos x$ 与之对应，所以 $y=\cos x$ 是一个函数，一般称为**余弦函数**.

尝试与发现

研究余弦函数 $y=\cos x$ 的性质，你能给出几种不同的方案呢？请你选择其中一个方案，研究余弦函数的性质.

显然，像通过正弦线研究正弦函数的性质一样，我们可以通过余弦线来研究余弦函数的性质. 不过，由

$$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

可知，$y=\cos x$ 的性质与图象和正弦型函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的相同，因此余弦函数的定义域为 1 ______；值域为 2 ______；余弦函数也是周期函数，且其周期为 3 ______；在区间 $[-\pi+2k\pi, 2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上递增，在 $[2k\pi, \pi+2k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上递减；函数的零点为 4 ______ $(k\in\mathbf{Z})$.

另外，由诱导公式 $\cos(-x)=\cos x$ 可知，$y=\cos x$ 是一个 5 ______ 函数.

函数 $y=\cos x$ 的图象称为**余弦曲线**. 由于 $y=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，因此余弦曲线可由正弦曲线向左平移 6 ______ 个单位得到，如图 7-3-13 所示.

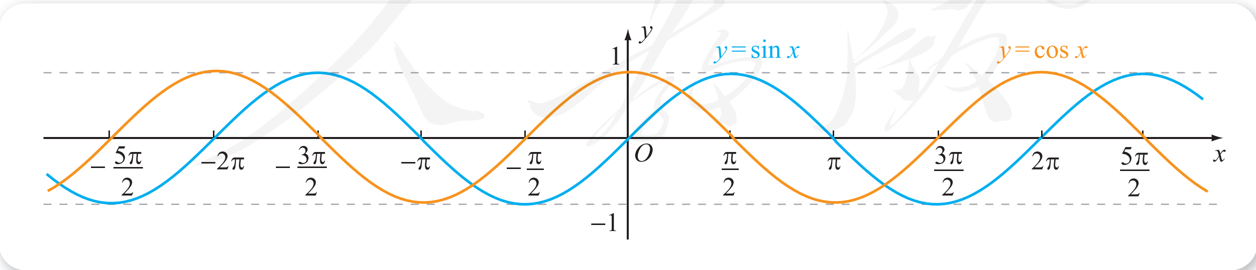


图 7-3-13

由图 7-3-13 可以看出，余弦曲线的对称轴为 $x=k\pi$，对称中心为 $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi, 0\right)$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

例 1 求下列函数的值域.

(1) $y=-3\cos x+1$;　　(2) $y=\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)^2-3$.

解 (1) 因为 $-1\leqslant\cos x\leqslant1$，所以 $3\geqslant-3\cos x\geqslant-3$，且

$$-2\leqslant-3\cos x+1\leqslant4,$$

即 $-2\leqslant y\leqslant4$.

当 $\cos x=1$ 时，$y_{\min}=-2$；当 $\cos x=-1$ 时，$y_{\max}=4$. 因此 $y=-3\cos x+1$ 的值域为 $[-2,4]$.

(2) 令 $t=\cos x$，则

$$y=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-3,\ t\in[-1,1].$$

因为 $-1\leqslant t\leqslant1$ 时，$-\dfrac{1}{2}\leqslant t+\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{3}{2}$，所以 $0\leqslant\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{9}{4}$，因此

$$-3\leqslant\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-3\leqslant-\frac{3}{4}.$$

当 $t=1$ 时，$y_{\max}=-\dfrac{3}{4}$；当 $t=-\dfrac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=-3$. 因此 $y=\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)^2-3$ 的值域为 $\left[-3,-\dfrac{3}{4}\right]$.

例 2 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\cos x+2$;　　(2) $y=\sin x\cos x$.

解 (1) 把函数 $y=\cos x+2$ 记作 $f(x)=\cos x+2$，因为定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=\cos(-x)+2=\cos x+2=f(x),$$

所以 $y=\cos x+2$ 是偶函数.

(2) 把函数 $y=\sin x\cos x$ 记作 $f(x)=\sin x\cos x$，因为定义域为 $\mathbf{R}$，且

$$f(-x)=\sin(-x)\cos(-x)=(-\sin x)\cos x=-f(x),$$

所以 $y=\sin x\cos x$ 是 7 ______ 函数.

例 3 求函数 $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的周期和其图象的对称轴方程.

解 因为

$$\begin{aligned}y&=2\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\\&=2\sin\left[\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{2}\right]\\&=2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

想一想

$y=A\cos(\omega x+\varphi)$（其中 A，ω，φ 都是常数，且 $A\neq0$，$\omega\neq0$）具有哪些性质？

所以 $T=\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$.

令 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$），解得 $x=\dfrac{3\pi}{4}+3k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）.

所以函数 $y=2\cos\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$的周期为 6π，其图象的对称轴方程为 $x=\dfrac{3\pi}{4}+3k\pi$（$k\in\mathbf{Z}$）.

例 4 求函数 $f(x)=\cos x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$的最大值和最小值.

解 （方法一）由余弦函数的性质可知，$f(x)=\cos x$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{4},0\right]$递增，在$\left[0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$递减，又因为

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\ f(0)=\cos 0=1,\ f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以函数的最大值为 1，最小值为$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（方法二）如图 7-3-14 所示，作出示意图，其中 OP 为角$-\dfrac{\pi}{4}$的终边，OP'为角$\dfrac{3\pi}{4}$的终边.区间$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$内的角的终边只能在直线 PP'的右上方，因此当角的余弦线为 $\overrightarrow{OM}$ 时，$f(x)$取得最大值

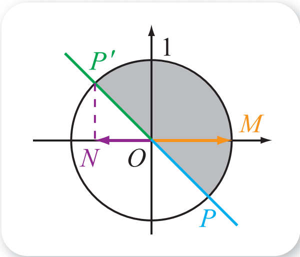


图 7-3-14

$$f(0)=\cos 0=1;$$

当角的余弦线为 $\overrightarrow{ON}$ 时，$f(x)$取得最小值

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

练习A

❶ 下列等式能否成立？为什么？

（1）$2\cos x=3$；　　　　（2）$\cos^2 x=\dfrac{1}{2}$.

❷ 不求值，分别比较下列各组余弦值的大小.

（1）$\cos 160°$和 $\cos 170°$；　　　　（2）$\cos\dfrac{1}{3}$和 $\cos\dfrac{2}{3}$.

3 求下列函数的周期.

(1) $y=\cos\dfrac{x}{3}$；　　(2) $y=2\cos\left(-3x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4 求函数 $y=2-\cos\dfrac{x}{3}$ 的最大值和最小值，并分别求出函数取最大值和最小值时 x 的值.

5 利用余弦线，研究余弦函数 $y=\cos x$ 的单调性、最大值和最小值，并分别求出函数取得最大值和最小值时 x 的值.

练习B

1 不求值，分别比较下列各组余弦值的大小.

(1) $\cos\dfrac{15\pi}{8}$ 和 $\cos\dfrac{14\pi}{9}$；　　(2) $\cos 515^\circ$ 和 $\cos 530^\circ$.

2 下列各题中，每两个函数的图象有什么关系？

(1) $y=\cos x$ 和 $y=\dfrac{1}{3}\cos x$；　　(2) $y=\cos x$ 和 $y=2\cos\dfrac{3x}{5}$；

(3) $y=\cos 2x$ 和 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$；　　(4) $y=\sin 2x$ 和 $y=\cos\left(-2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

3 函数 $y=\cos x$ 的图象经过怎样的变换能得到函数 $y=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象？

4 求函数 $y=2\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的单调区间.

5 写出决定余弦曲线在$[0，2\pi]$上形状的关键的五个点，并利用类似第 7.3.2 小节中的五点法作出 $y=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

1 **R**　2 $[-1，1]$　3 2π　4 $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$　5 偶　6 $\dfrac{\pi}{2}$　7 奇

7.3.4 正切函数的性质与图象

我们已经知道，对于任意一个角 x，只要 $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$，$k \in \mathbf{Z}$，就有唯一确定的正切值 $\tan x$ 与之对应，因此 $y=\tan x$ 是一个函数，称为**正切函数**.

利用正切线可以直观地表示正切值，如图 7-3-15 中，$\overrightarrow{AT}$ 就是角 x 的正切线.

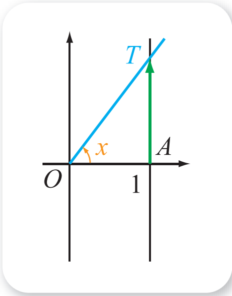


图 7-3-15

1. 正切函数的性质

尝试与发现

你能由正切线得出正切函数 $y=\tan x$ 具有哪些性质吗?

(1) 定义域与值域

因为角 $\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)的终边与横轴垂直，其正切值不存在，因此可知 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \,\middle|\, x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right\}$.

由图 7-3-15 中的正切线可以看出，当 x 从 0 开始增大并越来越接近 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x$ 的值从 0 开始增大，且它的值可以大于指定的任意正数，也就是说 $\tan x$ 能取到 $[0, +\infty)$ 内的所有数. 类似地，可以看出 $\tan x$ 能取到 $(-\infty, 0]$ 内的所有数. 因此，$y=\tan x$ 的值域为 1 ______.

(2) 奇偶性

由诱导公式 $\tan(-x)=-\tan x$ 可知，正切函数 $y=\tan x$ 是一个 2 ______ 函数.

(3) 周期性

由诱导公式 $\tan(x+\pi)=\tan x$ 或图 7-3-15 中正切线的变化规律可知，$y=\tan x$ 是周期为 π 的周期函数.

(4) 单调性

由 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数可知，我们只要知道正切函数在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的单调性，就能得到正切函数在所有有定义的区间上的单调性.

由图 7-3-15 中的正切线可以看出，正切函数 $y=\tan x$ 在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上单调递增. 由此可知，$y=\tan x$ 在每一个开区间$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）上都是单调递增的.

想一想

正切函数在定义域上是递增函数吗？

（5）零点

不难看出，正切函数 $y=\tan x$ 的零点为 3 ______ （$k\in\mathbf{Z}$）.

2. 正切函数的图象

因为 $y=\tan x$ 的周期为 π，所以只要作出 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上的图象，就可得到其在整个定义域内的图象. 又因为 $y=\tan x$ 是奇函数，所以只要知道 $y=\tan x$ 在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$上的图象即可.

取$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$内的几个点，列表如下.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y=\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

在平面直角坐标系中描点，如图 7-3-16 所示. 又根据 $y=\tan x$ 在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$上递增等信息，可知将这些点连接起来，形成光滑的曲线，就可以得到 $y=\tan x$ 在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$上的函数图象. 然后作这一段图象关于原点对称的图象，最后得到 $y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上的图象，如图 7-3-16 所示.

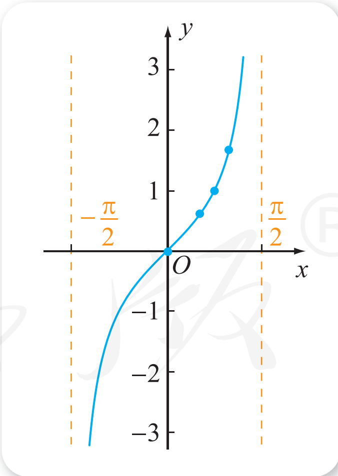


图 7-3-16

由于 $y=\tan x$ 的周期是 π，所以正切函数在$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）上的函数图象与其在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$上的函数图象完全相同，因此不难得到正切函数 $y=\tan x$ 的图象，如图 7-3-17 所示.

一般地，$y=\tan x$ 的函数图象称为**正切曲线**. 从图 7-3-17 不难看出，正切曲线是中心对称图形，其对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2},\ 0\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）.

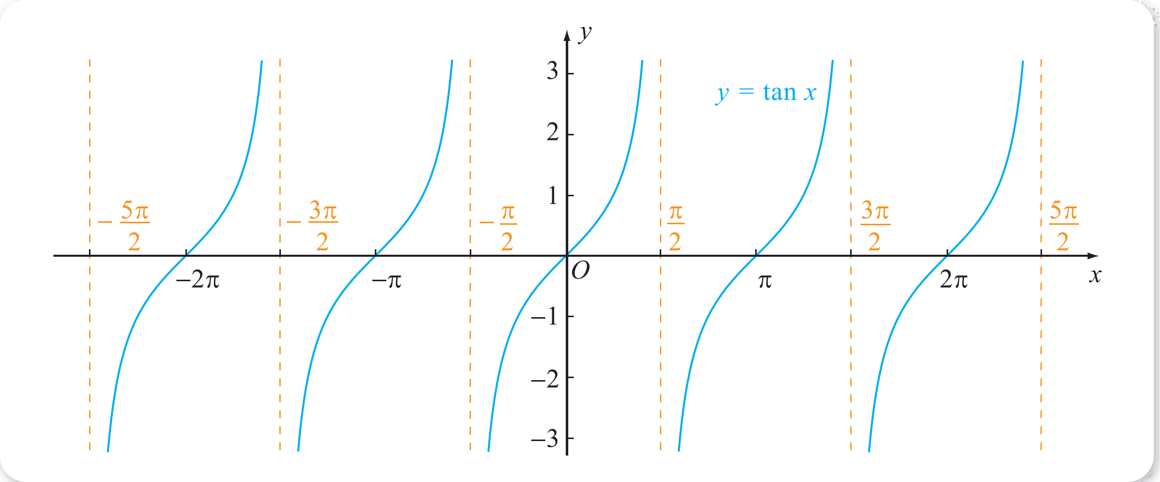


图 7-3-17

例 1 求函数 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域.

解 令 $u=x-\frac{\pi}{3}$，则 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 可以化成 $y=\tan u$.

因为 $y=\tan u$ 中，$u\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以

$$x-\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z},\ 即\ x\neq\frac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

所以函数 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的定义域为

4 ________________.

例 2 求函数 $y=\tan 3x$ 的周期.

解 令 $u=3x$，则 $y=\tan 3x$ 可以化成 $y=\tan u$.

由 $y=\tan u$ 的周期为 π 可知，对任意 u，当它增加到且至少要增加到 $u+\pi$ 时，对应的函数值才重复出现，因为

$$u+\pi=3x+\pi=3\left(x+\frac{\pi}{3}\right),$$

这说明对任意 x，当它增加到且至少要增加到 $x+\frac{\pi}{3}$ 时，$y=\tan 3x$ 的函数值才重复出现，这就说明 $y=\tan 3x$ 的周期为 5 ______.

想一想

$y=A\tan(\omega x+\varphi)$（其中 A，ω，φ 都是常数，且 $A\neq0$，$\omega\neq0$）具有哪些性质？

练习A

1. 求函数 $y=\tan 3x$ 的定义域.

2. 不求值，分别比较下列各组正切值的大小.

   (1) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)$和 $\tan\left(-\dfrac{3\pi}{7}\right)$；　　(2) $\tan 138^\circ$和 $\tan 143^\circ$.

3. 求下列函数的周期.

   (1) $y=5\tan\dfrac{x}{2}$；　　(2) $y=\tan \omega x\ (\omega>0)$.

4. 作出下列函数的图象.

   (1) $y=\tan\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$；　　(2) $y=\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

练习B

1. 求函数 $y=-\tan\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+2$ 的定义域.

2. 不求值，分别比较下列各组正切值的大小.

   (1) $\tan\left(-\dfrac{13\pi}{4}\right)$和 $\tan\left(-\dfrac{17\pi}{5}\right)$；　　(2) $\tan 1\ 519^\circ$和 $\tan 1\ 493^\circ$.

3. 求函数 $f(x)=\tan x$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{3}\right]$的最大值和最小值.

4. 判断下列函数的奇偶性.

   (1) $y=-\tan x$；　　(2) $y=-|\tan x|$.

5. 求函数 $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$的周期和单调区间.

1 **R**　　2 奇　　3 $k\pi$　　4 $\left\{x \,\middle|\, x\neq\dfrac{5\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$　　5 $\dfrac{\pi}{3}$

7.3.5 已知三角函数值求角

1. 利用三角函数线求角

尝试与发现

（1）如果已知 $\sin x=\frac{1}{2}$，你能求出满足条件的角 x 吗？

（2）如果已知 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$，你能求出 x 的取值范围吗？

在三角函数知识的应用中，经常会遇到尝试与发现中的类似问题，即已知三角函数值或值的范围，求角的值或角的范围的问题，这也就是本小节我们要研究的内容.

尝试与发现的问题(1)中，由 $\sin x=\frac{1}{2}>0$ 可知，角 x 对应的正弦线方向朝上，而且长度为$\frac{1}{2}$.

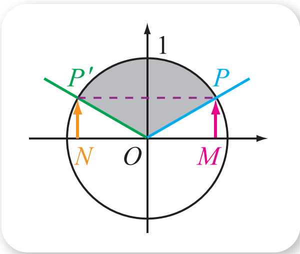


图 7-3-18

作示意图，如图 7-3-18 所示. 可知角 x 的终边可能是 OP，也可能是 OP'. 又因为

$$\sin\frac{\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2},$$

所以

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ 或 } x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

对于尝试与发现中的问题(2)来说，同样由图 7-3-18 可知，如果 x 的终边在$\angle POP'$中，则一定有 $\sin x\geqslant\frac{1}{2}$，因此，$x$ 的取值范围是

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

上述问题的解答也可借助正弦函数的图象——正弦曲线来完成，请读者自行尝试.

例 1 已知 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，求 x.

解　由 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}<0$ 可知，角 $2x+\frac{\pi}{3}$ 对应的余弦线方向朝左，且长度为 1 ______.

作示意图，如图 7-3-19 所示. 可知角 $2x+\frac{\pi}{3}$ 的终边可能是 OP，也可能是 OP'. 又因为

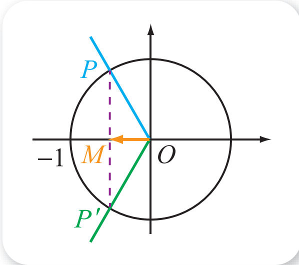


图 7-3-19

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\frac{4\pi}{3}=\boxed{2}\text{\_\_\_\_\_\_},$$

所以

$$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \text{ 或 } 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z},$$

即

$$x=\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ 或 } x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

例 1 同样可以通过余弦函数的图象——余弦曲线求解.

同前面类似，从图 7-3-19 可以得到不等式

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)<-\frac{1}{2}$$

的解集为 $\left(\frac{\pi}{6}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$，请读者自行说明理由.

例 2　已知 $\tan x=-1$，$x\in(3\pi,\ 5\pi)$，求 x.

解　由 $\tan x=-1<0$ 可知，角 x 对应的正切线的方向朝下，而且长度为 3 ______.

作示意图，如图 7-3-20 所示. 可知角 x 的终边可能是 OT，也可能是 OT'. 又因为

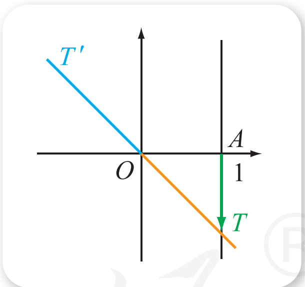


图 7-3-20

$$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{4}\text{\_\_\_\_\_\_},$$

所以

$$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

又由 $3\pi<-\frac{\pi}{4}+k\pi<5\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 可知 $k=4$ 或 $k=5$，因此

$$x=\frac{15\pi}{4} \text{ 或 } x=\frac{19\pi}{4}.$$

由图 7-3-20 还可得到不等式

$$\tan x>-1$$

的解集为 $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in\mathbf{Z})$.

例 2 同样可以通过正切函数的图象——正切曲线求解.

2. 用信息技术求角

由上面可以知道，即使给出的三角函数值是特殊值，求对应的角也并不容易. 不过，借助计算器或者计算机软件，给定三角函数值可以求出特定范围内的角.

由图 7-3-18 或正弦曲线可以看出，任意给定一个 $y\in[-1,\ 1]$，满足 $\sin x=y$ 的 x 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 内只有一个，利用计算器或计算机软件可以方便地求出这个 x 的值. 不过，在不同的计算器或计算机软件中，表示满足条件的 x 的符号不同.

例如，很多科学计算器用 $\mathrm{SIN}^{-1}y$ 表示满足条件的 x 值，如图 7-3-21 所示. 此时，要在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 内求出满足 $\sin x=0.5$ 的 x 值，只要输入 $\mathrm{SIN}^{-1}0.5$ 即可.

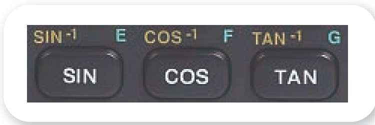


图 7-3-21

在 Excel 中，用 ASIN(y)表示满足条件的 x 值. 如图 7-3-22 所示，在 Excel 的任意一个单元格输入“$=$ASIN(0.5)”，就能得到 $\dfrac{\pi}{6}$ 的小数形式.

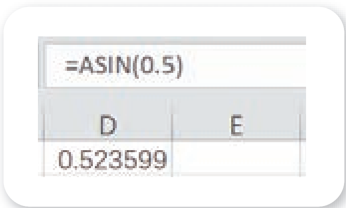


图 7-3-22

在 GeoGebra 中，用 arcsin(y)和 asind(y)表示满足条件的 x 值，但前者得到的是弧度值，后者得到的是角度值. 在 GeoGebra 的运算区中，输入“arcsin(0.5)”，就能得到 $\dfrac{\pi}{6}$，如图 7-3-23(1)所示；输入“asind(0.5)”，就能得到 30°，如图 7-3-23(2)所示.

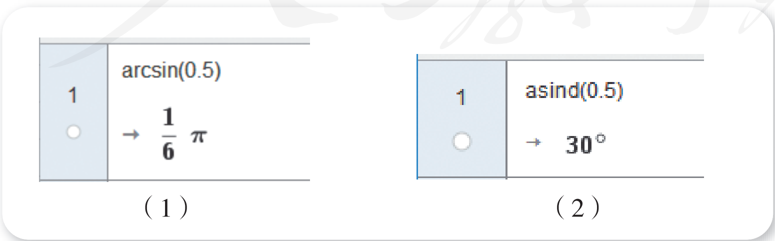


图 7-3-23

事实上，在数学中，任意给定一个 $y\in[-1,\ 1]$，当 $\sin x=y$ 且 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，通常记作

$$x=\arcsin y.$$

因此，不难知道

$$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},\quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{5}\underline{\qquad},\quad \arcsin 1=\boxed{6}\underline{\qquad}.$$

类似地，我们有：

在区间$[0,\pi]$内，满足$\cos x=y$（$y\in[-1,1]$）的x只有一个（参见图 7-3-19 或余弦曲线），这个x记作$\arccos y$，即

$$x=\arccos y;$$

在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内，满足$\tan x=y$（$y\in\mathbf{R}$）的$x$只有一个（参见图 7-3-20 或正切曲线），这个x记作$\arctan y$，即

$$x=\arctan y.$$

上述x的值也都可以用计算器或计算机软件得到，而且符号类似，这里不再重复.

练习A

1. 是否存在x，使得$\sin x=\sqrt{3}$？若存在，求出x的值；若不存在，说明理由.
2. 分别求满足下列条件的x的值.

   （1）$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；（2）$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$；

   （3）$\tan x=\sqrt{3}$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$；（4）$\sin x=1$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
3. 求满足条件$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$的$x$的值.
4. 求满足条件$\tan x=\sqrt{3}$的x的值.
5. 分别写出满足下列条件的x值的范围.

   （1）$1+\tan x\geqslant 0$；（2）$\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$.

练习B

1. 分别求满足下列条件的x的值.

   （1）$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；（2）$\cos x=-\frac{1}{2}$，$x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$；

   （3）$\sin x=0$，$x\in[0,2\pi]$；（4）$\cos x=1$，$x\in[0,2\pi]$.

2. 求满足条件 $\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x\in\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$的 x 的值.

3. 求满足条件 $\tan\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$的 x 的值.

4. 求不等式 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$的解集.

5. 用计算器或计算机软件求出以下各式的值（精确到 0.001）.

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$；　(2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$；

(3) $\arctan 1$；　(4) $\arcsin 0$.

6. 用合适的符号表示满足条件 $\tan x=-2$ 且 $x\in\left(\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right)$的 x 的值，并用计算器或计算机软件得出其近似值（精确到 0.001）.

1 $\frac{1}{2}$　2 $-\frac{1}{2}$　3 1　4 -1　5 $-\frac{\pi}{3}$　6 $\frac{\pi}{2}$

习题7-3A

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{1}{1+\sin x}$；　(2) $y=\frac{1}{1-\cos x}$；

(3) $y=\sqrt{\tan x}$；　(4) $y=\frac{1}{\sin x\cos x}$.

2. 求下列函数的周期.

(1) $y=\sin\frac{3x}{4}$；　(2) $y=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$；

(3) $y=3\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$；　(4) $y=\tan\frac{2x}{3}$.

3. 求下列函数的最大值和最小值，并求函数取得这些值时 x 的集合.

(1) $y=-3\cos x$；　(2) $y=\frac{1}{2}\sin x-1$；

(3) $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$；　(4) $y=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+3$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=-2\sin 2x$；　(2) $y=|\sin x|$；

(3) $y=3\cos x+1$；　(4) $y=\tan x-1$.

5 作出下列函数的简图.

(1) $y=1-\sin x$，$x\in[0, 2\pi]$；　(2) $y=2\cos x-1$，$x\in[0, 2\pi]$.

6 (1) 由余弦曲线怎样得到函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象?

(2) 由 $y=\sin 3x$ 的图象怎样得到函数 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象?

(3) 求函数 $y=4\sin x$，$x\in[-\pi, \pi]$的单调区间.

(4) 判断函数 $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的奇偶性.

7 分别求满足下列条件的 x 的值.

(1) $\sin x=-\frac{1}{2}$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；　(2) $\cos x=-\frac{1}{2}$，$x\in[0, 2\pi]$；

(3) $\sin 2x=0$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$；　(4) $\tan x=\sqrt{3}$.

习题7-3B

1 把函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象进行怎样的变换，就能得到函数 $y=-\cos 2x-2$ 的图象?(用两种方法实现)

2 把函数 $y=\sin 3x$ 的图象进行怎样的变换，就能得到函数 $y=\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象?

3 求下列函数的值域.

(1) $y=\sin x$，$x\in\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$；　(2) $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

4 求下列函数的最大值和最小值，以及使函数取得这些值时 x 的值.

(1) $y=\frac{1}{1+\cos^2 x}$；　(2) $y=\frac{1}{5\sin^2 x+1}$；

(3) $y=2-(\sin x+1)^2$；　(4) $y=\cos^2 x+2\sin x-3$.

5 作出函数 $y=-2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 在一个周期内的图象.

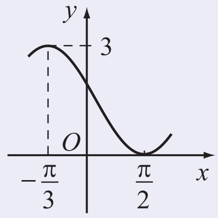
6 作出函数 $y=|\sin x|$ 的图象，观察图象写出它的周期，并用周期函数的定义加以证明.

7 下列四个函数中，以 π 为最小正周期，且在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减的是（　　）.

(A) $y=\cos x$　　(B) $y=2|\sin x|$

(C) $y=\cos\dfrac{x}{2}$　　　　(D) $y=\tan x$

8 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B\left(\text{其中 }A, \omega, \varphi, B\text{ 均为常数，}A>0,\ |\varphi|<\pi\right)$的部分图象如右图所示，写出与之对应的一个函数解析式．



（第 8 题）

9 已知电流 i 随时间 t 变化的关系式是

$$i=5\sin\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right),\ t\in[0,\ +\infty).$$

(1) 求电流 i 的周期、频率、振幅和初相；

(2) 分别求 $t=0$，$\dfrac{1}{600}$，$\dfrac{1}{150}$，$\dfrac{7}{600}$，$\dfrac{1}{60}$时的电流．

10 求函数 $y=-2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$的周期、振幅以及单调区间．

11 用计算器或计算机软件分别求下列各式中 x 的值（精确到 0.001）．

(1) $\sin x=\dfrac{3}{5}$，$x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right]$；　　(2) $\cos 2x=\dfrac{1}{3}$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right]$；

(3) $\tan x=\dfrac{1}{2}$，$x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$．

7.4　数学建模活动：周期现象的描述

按照优势互补的原则，跟其他同学组成一个数学建模小组，采用分工合作的方式，寻找日常生活或其他学科中有关的周期现象，借助合适的仪器，采集数据，并尝试通过建立与三角函数有关的数学模型去描述该周期现象.

活动提示

完整的数学建模活动一般要经历选题、开题、做题、结题四个过程. 选题是指根据要求选定合适的研究对象的过程，开题是指讨论与确定建模步骤的过程，做题是指按照讨论的步骤进行实际建模的过程，结题是指总结与交流的过程.

数学建模的过程中，一般都要借助计算机软件进行作图、计算、数据整理等. 可以借助的软件，除了我们教材中使用的 GeoGebra 和 Excel 之外，还可以使用 MATLAB，Maple，Mathematica，SPSS 等. 整理数学建模的论文，可以使用 Word，LaTex 等.

以下周期性现象与知识可供参考.

1. 海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫潮汐. 一般早潮叫潮，晚潮叫汐. 在通常情况下，船在涨潮时驶进航道，靠近船坞；卸货后落潮时返回海洋. 下面是某港口在某季节每天的时间与水深值（单位：m）记录表.

时刻	0:00	3:00	6:00	9:00	12:00	15:00	18:00	21:00	24:00
水深值	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0

（1）选用一个三角函数来近似地描述这个港口的水深值与时间的函数关系，给出整点时水深的近似数值；

（2）一条货船的吃水深度（船底与水面的距离）为 4 m，安全条例规定至少要有 1.5 m 的安全间隙（船底与海底的距离），该船何时能进入港口？在港口能停多久？

（3）某船的吃水深度为 4 m，安全间隙为 1.5 m，该船在 2:00 开始卸货，吃水深度以每小时 0.3 m 的速度减小，那么该船在什么时间必须停止卸

货，将船驶向较深的水域？

2. 单摆、弹簧等简谐振动可以用三角函数表达为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，其中 x 表示时间，y 表示位移，A 表示振幅，$\frac{|\omega|}{2\pi}$表示频率，φ 表示初相位.

图 7-4-1 是单摆的示意图. 点 O 为摆球的平衡位置. 如果规定摆球向右偏移的位移为正，则当摆球到达点 C 时，摆球的位移 y 达到最大值 A；当摆球到达点 O 时，摆球的位移 y 为 0；当摆球到达点 D 时，摆球的位移 y 达到反向最大值 $-A$；当摆球再次到达点 O 时，摆球的位移 y 又一次为 0；当摆球再次到达点 C 时，摆球的位移 y 又一次达到最大值 A. 这样周而复始，形成周期变化.

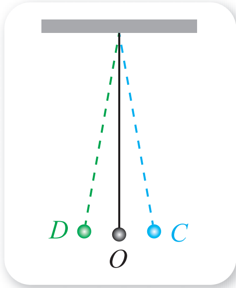


图 7-4-1

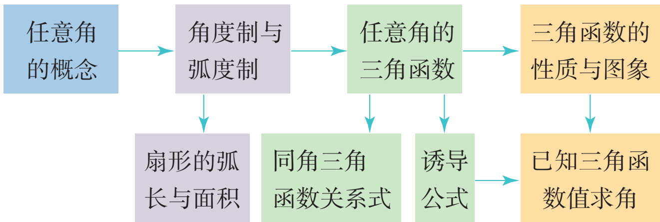
3. 音叉发出的纯音振动可以用三角函数表达为 $y=A\sin\omega x$，其中 x 表示时间，y 表示纯音振动时音叉的位移，$\frac{|\omega|}{2\pi}$表示纯音振动的频率（对应音高），A 表示纯音振动的振幅（对应音强）.

4. 交变电流可以用三角函数表达为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，其中 x 表示时间，y 表示电流，A 表示最大电流，$\frac{|\omega|}{2\pi}$表示频率，φ 表示初相位.

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们把 $0^\circ \sim 360^\circ$ 的角推广到了任意角，并学习了弧度制和任意角的三角函数，以及三角函数的性质与图象．参考以下的知识结构图示例，请你作出自己理解的本章知识结构图，并和同学们一起交流，看看各自的图的优点是什么．



02 课题作业

古希腊地理学家埃拉托色尼用下面的方法估算地球周长．他从书中得知，位于尼罗河第一瀑布的塞伊尼（现在的阿斯旺，在北回归线上），夏至那天正午立竿无影；同样在夏至那天，他所在的城市——埃及北部的亚历山大城，立杆可测得日影角大约为 7°．埃拉托色尼猜想造成这个差异的原因在于地球是圆的，并且因为太阳距离地球很远（现代科学测量得知，太阳光到达地球表面需要 8.3 min，光速 300 000 km/s），太阳光平行照射在地球上．根据平面几何知识，平行线内错角相等，因此日影角与两地对应的地心角相等．他又派人测得两地距离大约为 5 000 希腊里，约合 800 km；因为 360° 大约为 7° 的 50 倍，于是他估算地球周长约为 $800 \times 50 = 40\ 000$ (km)，这与地球实际周长 40 076 km 相差无几．

（1）试作出平面示意图；

（2）试由埃拉托色尼的估算结果，给出你的推理过程；

（3）查阅网络或有关文献，了解三角函数知识在日常生活中的应用，任选一个主题，将所收集得到的材料整理成演讲稿，并与其他同学交流．

03 复习题

A 组

1. 若角 α 的终边落在直线 $y = -3x$ 上，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值．

2. 求函数 $y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}+\dfrac{|\cos x|}{\cos x}+\dfrac{\tan x}{|\tan x|}$ 的值域.

3. 确定下列三角函数值的符号.

（1）$\sin 4$；（2）$\cos 5$；

（3）$\tan 8$；（4）$\tan(-3)$.

4. 已知 $\sin x=2\cos x$，求角 x 的正弦、余弦、正切.

5. 化简 $\sqrt{1+2\sin(\pi-2)\cos(\pi-2)}$.

6. 已知 $\tan\alpha=3$，分别求下列各式的值.

（1）$\dfrac{4\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+3\sin\alpha}$；（2）$\sin\alpha\cos\alpha$；

（3）$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$；（4）$2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha$.

7. 已知 $\sin(\pi+\alpha)=-\dfrac{1}{2}$，分别求下列各式的值.

（1）$\cos(2\pi-\alpha)$；（2）$\tan(\alpha-7\pi)$.

8. 求 $\cos\dfrac{25\pi}{6}+\cos\dfrac{25\pi}{3}+\tan\left(-\dfrac{25\pi}{4}\right)$ 的值.

9. 证明下列恒等式.

（1）$\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$；

（2）$\cos^2\alpha(2+\tan\alpha)(1+2\tan\alpha)=2+5\sin\alpha\cos\alpha$.

10. 判断下列函数的奇偶性.

（1）$y=x^2+\cos x$；（2）$y=|2\sin x|$；

（3）$y=x^2\sin x$.

11. 用五点法作出下列函数在一个周期的闭区间上的简图.

（1）$y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；（2）$y=2\cos\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

12. 写出函数 $y=2\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的振幅、周期、初相，并说明如何由正弦曲线得出它的图象，求出它的最大值以及取最大值时 x 的值.

13. 根据下列条件，求△ABC 的内角 A.

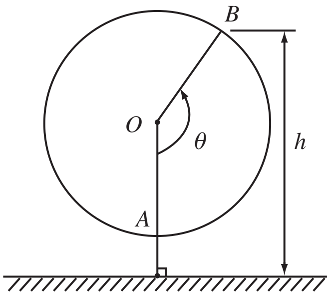
（1）$\sin A=\dfrac{1}{2}$；（2）$\tan A=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

14. 函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象是不是轴对称图形？如果是，那么对称轴方程是什么？

15. 如图为一个摩天轮示意图．该摩天轮圆半径为 4.8 m，圆上最低点与地面距离为 0.8 m，60 s 转动一周．图中 OA 与地面垂直．以 OA 为始边，逆时针转动 θ 角到 OB．设 B 点与地面的距离为 h m.

（1）求 h 与 θ 的函数解析式；

（2）设从 OA 开始转动，经过 t s 到达 OB，求 h 与 t 的函数解析式.



（第 15 题）

B 组

1. 一个扇形的弧长与面积的数值都是 5，求这个扇形中心角的度数.

2. 已知 α 为第二象限的角，化简

$$\cos\alpha\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sin\alpha\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

3. 求证：

$$\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

4. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象经过怎样的变换，就能得到函数 $y=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$的图象？

5. 求下列函数的单调递减区间.

（1）$y=3\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$；　　（2）$y=3\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

6. 求满足下列关系式的 x 的集合.

（1）$1+\sqrt{3}\tan x=0$，$x\in\mathbf{R}$；　　（2）$\tan x-1=0$，$x\in\mathbf{R}$；

（3）$\cos(\pi-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$x\in\mathbf{R}$；　　（4）$2\sin^2 x=1$，$x\in\mathbf{R}$.

7. 利用单位圆中的正弦线、余弦线或三角函数图象解下列各题.

（1）求满足不等式 $2\cos x+1\leqslant 0$ 的 x 的集合；

（2）求函数 $y=\sqrt{1-2\sin x}$ 的定义域.

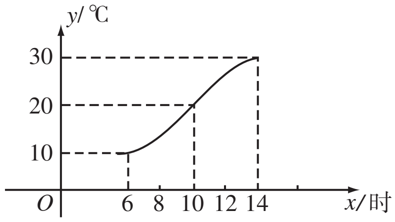
8. 如图所示，某地一天从 6 时至 14 时的温度变化曲线近似满足函数

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b,$$

其中 $A>0$，且函数在 6 时与 14 时分别取得最小值（最低温度）和最大值（最高温度）.

（1）求这段时间的最大温差；

（2）写出这段曲线的函数解析式.



（第 8 题）

数学不仅是一门基础学科，更能对思维进行很好的训练．无论学习何种专业，做科研也好、做其他工作也好，数学修养对专业的发展都很有裨益．

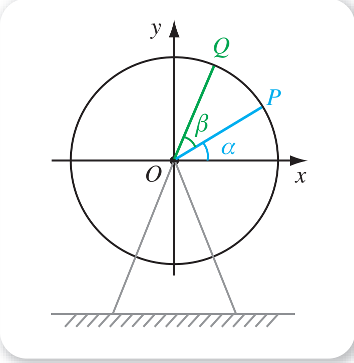
——杨乐

第八章

向量的数量积与三角恒等变换

本章导语

让我们再来考察由摩天轮抽象出的问题.



右图是摩天轮的示意图. 我们考察摩天轮转轮上的两个座椅 P，Q 的转动. 设转轮静止时，OP 平行于地面. 现在的问题是，当座椅 P 逆时针转动角 α 后，如果知道座椅 P 到地面的距离，如何计算座椅 Q 到地面的距离？

以转轮的中心 O 为坐标原点建立平面直角坐标系 xOy，不妨设摩天轮的转轮半径为单位长. 由于转轮中心 O 到地面的距离为定值，则上述问题就可转化为如下的数学问题.

已知单位圆上两点 P，Q，记$\angle xOP=\alpha$，$\angle POQ=\beta$，则点 P 的纵坐标为 $\sin\alpha$，点 Q 的纵坐标为 $\sin(\alpha+\beta)$.

由问题的已知条件，容易求出 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$. 现在要问，能否由 α，β 的正弦和余弦求出 $\sin(\alpha+\beta)$？

事实上，我们在研究三角函数式的变形或计算时，经常提出这样的问题：能否用 α，β 的三角函数去表示 $\alpha\pm\beta$ 的三角函数？为了解决这类问题，本章首先学习向量数量积的知识，然后用向量方法推证 $\alpha-\beta$ 的余弦与 α，β 的正弦、余弦的关系式，进而研究 $\alpha\pm\beta$ 的正弦、正切公式. 在此基础上推证倍角公式、半角公式以及积化和差、和差化积公式. 这些公式是进行三角恒等变换的基础，有着广泛的应用.

8.1　向量的数量积

8.1.1　向量数量积的概念

情境与问题

我们在物理课中学过，力与在力的方向上移动的距离的乘积称为力对物体所做的功．如图 8-1-1 所示，如果作用在小车上的力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为 $|\boldsymbol{F}|$ N，小车在水平面上位移 $\boldsymbol{s}$ 的大小为 $|\boldsymbol{s}|$ m，力的方向与小车位移的方向所成夹角为 θ，那么这个力所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta.$$

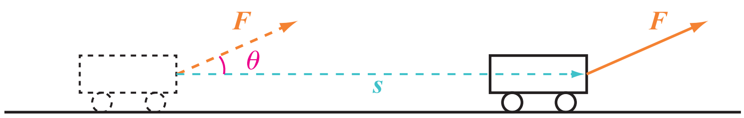


图 8-1-1

（1）显然，功 W 与力向量 $\boldsymbol{F}$ 及位移向量 $\boldsymbol{s}$ 有关，这三者之间有什么关系？

（2）给定任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，能确定出一个类似的标量吗？如果能，请指出确定的方法；如果不能，说明理由．

情境与问题中的功 W 由向量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的大小以及这两个向量方向的差异确定．一般地，给定任意两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，能确定出一个类似的标量，这也就是本小节我们要学习的向量的数量积．

1. 两个向量的夹角

给定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任选一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则称 $[0, \pi]$ 内的 $\angle AOB$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记作 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

例如，图 8-1-2 中，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$，即 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=$ 1 ________．

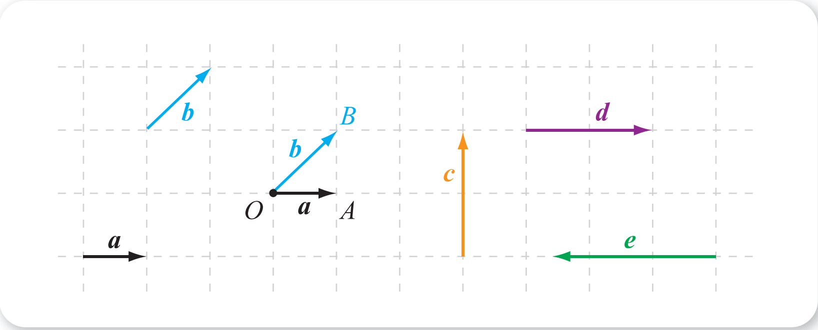


图 8-1-2

类似地，图 8-1-2 中，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，即 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}\rangle=\frac{\pi}{2}$；向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 的夹角为 0，即 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{d}\rangle=0$；向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 的夹角为 π，即 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}\rangle=$ 2 ________.

尝试与发现

如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，那么

（1）$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$ 的取值范围是什么？

（2）$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\rangle$ 是否成立？

根据向量夹角的定义可知，两个非零向量的夹角是唯一确定的，而且

$$0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi,$$

$$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\rangle.$$

当 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$ 时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ **垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 由于零向量方向是不确定的，在讨论垂直问题时，规定零向量与任意向量垂直.

2. 向量数量积的定义

一般地，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时，称 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（也称为**内积**），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle.$$

由定义可知，两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积是一个实数，这与向量的加法、减法以及数乘向量的结果仍是一个向量不同.

尝试与发现

如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，那么 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 可以是正数吗？可以是负数吗？可以是零吗？你能举出实例加以说明吗？

观察两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积的定义可知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的符号由 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 决定，从而也就是由 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 的大小决定.

例如，图 8-1-3 中，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0，\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0，\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}<0.$$

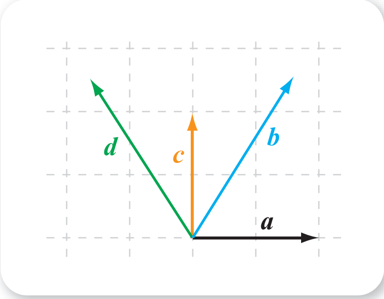


图 8-1-3

这就是说，两个非零向量的数量积既可以是正数，也可以是零，还可以是负数.

如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，依照定义还可以得出向量的数量积有如下性质（请读者自行说明理由）.

（1）$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；

（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，即 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

一般地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 可以简写为 $\boldsymbol{a}^2$，因此上述性质(2)也可改写为 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$.

为了方便起见，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 至少有一个是零向量时，称它们的数量积（即内积）为 0，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 这样一来，任意给定两个平面向量，都有确定的数量积，而且上述数量积的性质还都成立.

另外，我们还能得到数量积的如下性质.

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是它们的数量积为 0，即

$$\boxed{\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.}$$

例 1 （1）已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

（2）已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，求 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

解 （1）由已知可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\\&=5\times4\times\cos120^\circ=-10.\end{aligned}$$

（2）由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 可知

$$3=3\times2\times\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,$$

因此 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{1}{2}$，从而可知 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=$ 3 ________.

由例 1(2)可以看出，如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

3. 向量的投影与向量数量积的几何意义

如图 8-1-4 所示，设非零向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，过 A，B 分别作直线 l 的垂线，垂足

分别为 A'，B'，则称向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在直线 l 上的**投影向量**或**投影**.

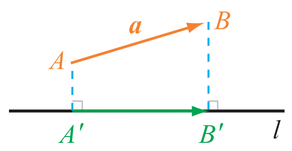


图 8-1-4

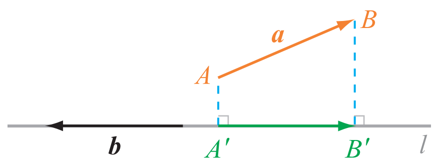


图 8-1-5

类似地，给定平面上的一个非零向量 $\boldsymbol{b}$，设 $\boldsymbol{b}$ 所在的直线为 l，则 $\boldsymbol{a}$ 在直线 l 上的投影称为 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的**投影**. 如图 8-1-5 中，向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\overrightarrow{A'B'}$. 可以看出，一个向量在一个非零向量上的投影，一定与这个非零向量共线，但它们的方向既有可能相同，也有可能相反.

尝试与发现

如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，且 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\overrightarrow{A'B'}$，那么向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 的方向、长度与 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 有什么关联？

如图 8-1-6(1)(2)(3)所示.

当 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\overrightarrow{A'B'}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同，而且

$$|\overrightarrow{A'B'}|=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle;$$

当 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\overrightarrow{A'B'}$ 为零向量，即 $|\overrightarrow{A'B'}|=0$；

当 $\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle>\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\overrightarrow{A'B'}$ 的方向与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反，而且

$$|\overrightarrow{A'B'}|=-|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle.$$

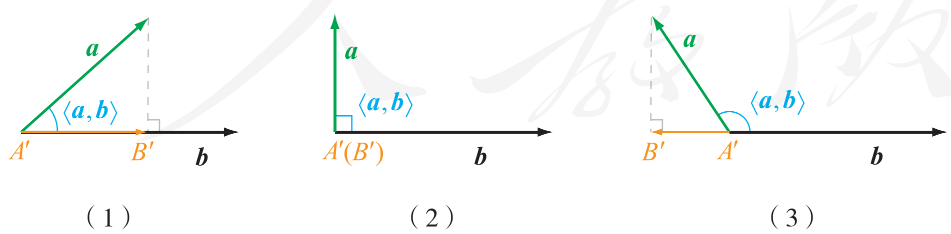


图 8-1-6

一般地，如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则称 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的**投影的数量**. 投影的数量与投影的长度有关，但是投影的数量既可能是非负数，也可能是负数.

因为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=(|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle)|\boldsymbol{b}|,$$

所以两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，等于 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量与 $\boldsymbol{b}$ 的模的乘积．这就是两个向量数量积的几何意义．

特别地，当 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量时，因为 $|\boldsymbol{e}|=1$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{e}\rangle,$$

即任意向量与单位向量的数量积，等于这个向量在单位向量 $\boldsymbol{e}$ 上的投影的数量．

例 2 如图 8-1-7 所示，求出以下向量的数量积．

（1）$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；　（2）$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$；　（3）$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}$．

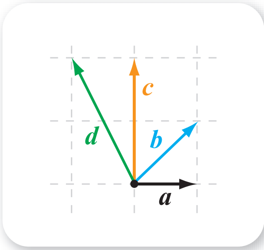


图 8-1-7

解 （1）（方法一）由图可知，

$$|\boldsymbol{a}|=1,\ |\boldsymbol{b}|=\sqrt{2},\ \langle\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\rangle=\frac{\pi}{4},$$

因此

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=\sqrt{2}\times1\times\cos\frac{\pi}{4}=1.$$

（方法二）由图可以看出，向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的数量为 1，且 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量，因此根据向量数量积的几何意义可知 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=1$．

（2）由图可知，$\langle\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}\rangle=\frac{\pi}{2}$，因此 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$ 4 ____________．

（3）由图可知，向量 $\boldsymbol{d}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的数量为 -1，且 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量，因此根据向量数量积的几何意义可知

$$\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}=\text{5 ____________}.$$

练习A

❶ 根据以下条件，分别求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．

（1）$|\boldsymbol{a}|=8$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$；　（2）$|\boldsymbol{a}|=7$，$|\boldsymbol{b}|=12$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$；

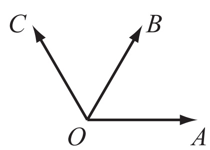
（3）$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$；　（4）$|\boldsymbol{a}|=4$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=0$．

❷ 根据以下条件，分别求 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$．

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=10$；　（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-8$，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=16$；

（3）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-25$，$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=5$；　（4）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=6$．

❸ 如图，已知 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 的模均为 5，且 $\angle AOB=\angle BOC=60^\circ$，求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$．



（第 3 题）

❹ 已知 $|\boldsymbol{a}|=5$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的数量为 6，而 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的数量为 -8，求 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$．

❺ 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=45^\circ$，求 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量．

练习B

1. 已知$\triangle ABC$是边长为2的等边三角形，求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$.

2. 判断下列命题的真假.

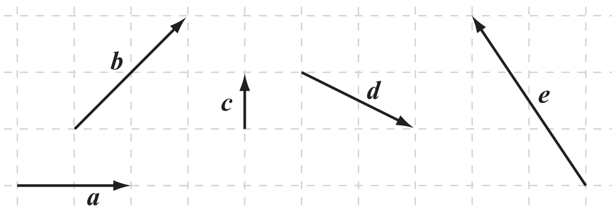
(1) 若向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；

(2) 若向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则$\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$或$\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

3. 两个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的数量积$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，是否等于$\boldsymbol{b}$在向量$\boldsymbol{a}$上的投影的数量与$\boldsymbol{a}$的模的乘积？

4. 如图所示，求出以下向量的数量积.

(1) $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；　(2) $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$；　(3) $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a}$；　(4) $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}$.



（第4题）

5. 已知$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$是一个正六边形，将下列向量的数量积按从小到大的顺序排列：$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$，$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}$，$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_5}$，$\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_6}$.

1 $\frac{\pi}{4}$　2 π　3 $\frac{\pi}{3}$　4 0　5 -1

8.1.2 向量数量积的运算律

尝试与发现

我们已经知道，很多运算都满足一定的运算律．例如，向量的加法满足交换律，数乘向量对加法满足分配律，即对任意向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$以及实数λ，有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

根据向量数量积的定义，探讨向量数量积的运算满足哪些运算律，并说明理由.

当$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是两个非零向量时，因为$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$，所以根据

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle,\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$$

可知

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a},}$$

即向量的数量积满足交换律.

当 λ 是实数且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是向量时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是向量，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ 都是实数，那么这两个实数相等吗？答案是肯定的，即

$$\boxed{(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}$$

恒成立.

事实上，当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量且 $\lambda\neq0$ 时，

(1) 如果 $\lambda>0$，则 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$，且 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，从而

$$\langle\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle,$$

因此

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b});$$

(2) 如果 $\lambda<0$，则 $|\lambda\boldsymbol{a}|=-\lambda|\boldsymbol{a}|$，且 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向 1 ________，从而

$$\langle\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\pi-\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle,$$

因此

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}&=|\lambda\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=-\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle)\\&=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 中至少有一个是零向量或 $\lambda=0$ 时，显然也有 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

当然，用同样的方法可以得到 $\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

尝试与发现

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都是向量时，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 都是实数吗？如果是，这 3 个实数之间有什么关系？

因为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是向量时，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 仍是向量，因此 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 都是实数，而且，从形式上可以猜出

$$\boxed{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c},}$$

也就是向量的数量积对加法满足分配律.

那么，怎样才能确定这个结论成立呢？如果直接从数量积的定义来考虑，将需要讨论 $\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\rangle$，$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}\rangle$，$\langle\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\rangle$ 等之间的关系，是比较烦琐的. 下面我们从数量积的几何意义来考虑.

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中至少有一个是零向量时，分配律显然成立. 因此下面只要说明 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都不是零向量的情形即可.

此时，$|\boldsymbol{c}|\neq 0$，设 $\boldsymbol{c}_0=\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}$，即 $\boldsymbol{c}_0$ 是与 $\boldsymbol{c}$ 同向的单位向量.

如图 8-1-8 所示，设点 O 与 $\boldsymbol{c}_0$ 都在直线 l 上，且

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b},$$

则 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

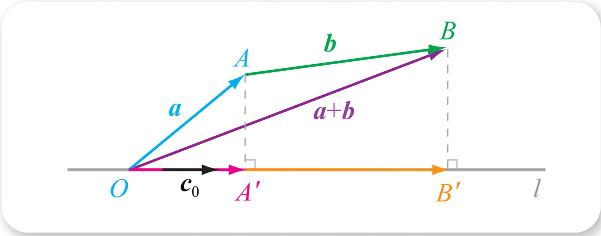


图 8-1-8

过 A，B 分别作直线 l 的垂线 AA'，BB'，则由向量投影的定义可知，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{c}_0$ 上的投影为 $\overrightarrow{OA'}$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}_0$ 上的投影为 $\overrightarrow{A'B'}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{c}_0$ 上的投影为 $\overrightarrow{OB'}$．又因为

$$\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'},$$

所以根据向量数量积的几何意义可知

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}_0,$$

在这个式子两边同时乘以 $|\boldsymbol{c}|$，即可知

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

由向量数量积满足以上的运算律还可得到

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},$$

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

等，请读者自行说明理由.

例 1 求证：

（1）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$；　　（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$.

证明 （1）

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2.\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2.\end{aligned}$$

例 1(2)实际上将 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 这三个向量的模与 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 联系起来了．而且，利用完全类似的方法，还可证明：

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,$$

请读者自行尝试．这些结论以后均可直接使用．

例 2 （1）已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$，求$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$；

（2）已知$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$．

解 （1）由题意可知

$\boldsymbol{a}^2=4$，$\boldsymbol{b}^2=$ $\boxed{2}$__________，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times1\times\cos\ 60^\circ=1$，

所以

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2\\&=\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2\\&=4+4\times1+4\times1\\&=12,\end{aligned}$$

因此$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$ $\boxed{3}$______________．

（2）由题意可知$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$，即$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$，因此

$$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2,$$

因此$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$ $\boxed{4}$______________．

例 3 利用向量证明菱形的两条对角线互相垂直．

如图 8-1-9 所示，已知 $ABCD$ 是菱形，AC 与 BD 是两条对角线．求证：$AC\perp BD$．

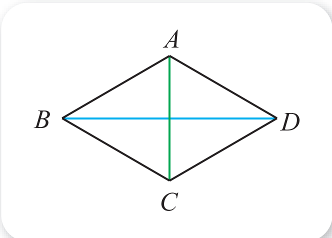


图 8-1-9

证明 由已知可得

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB},$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\\&=|\overrightarrow{AD}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2.\end{aligned}$$

又因为 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB=AD$，即$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|$，因此

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0,$$

从而 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，故 $AC\perp BD$．

例 3 的证明中，实际上是选择了$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\}$为基底，然后将$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$用这两个向量表示出来．选择合适的向量作为基底往往是用类似的向量方法解决几何问题的关键．

例 4 利用向量证明三角形的三条高相交于一点．

如图 8-1-10 所示，已知△ABC 中，BE，CF 分别为 AC，AB 边上的高，而且 BE 与 CF 相交于点 O，连接 AO 并延长，与 BC 相交于点 D．求证：$AD\perp BC$．

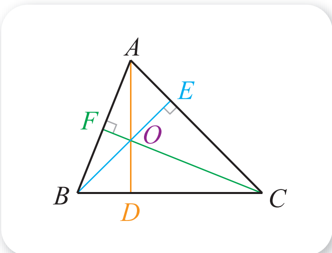


图 8-1-10

证明 因为 $BE\perp AC$，所以 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ 5 ________，即

$$\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0,$$

因此

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}. \quad ①$$

又因为 $CF\perp AB$，所以 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，即

$$\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0,$$

因此

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}. \quad ②$$

由①－②可得 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，因此

$$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OA}=0,$$

从而 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，故 $BC\perp OA$，即 $AD\perp BC$.

例 4 中的结论我们在初中几何中就已经遇到过，这里实际上是给出了严格的证明，由此可见平面向量数量积的作用之大.

练习A

1. 已知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，求下列各式的值.

   (1) $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；　(2) $(-\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}$；　(3) $(-\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a})$.

2. 求证：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2)$.

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=120^\circ$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

4. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{7}$，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.

5. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的夹角.

练习B

1. 当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都是向量时，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 是否成立？为什么？

2. 已知 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=60^\circ$，求 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$.

3. 已知 $|\boldsymbol{a}|=6$，$|\boldsymbol{b}|=8$，且 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影的数量为 -4，求 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $|\overrightarrow{AB}|=3$，$|\overrightarrow{BC}|=5$，$\angle ABC=60^\circ$，求 $|\overrightarrow{AC}|$.

5. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，从几何上说明当 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 时，一定有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

6. 利用向量的数量积证明如下结论.

   (1) 长方形的两条对角线相等；

   (2) 平行四边形对角线的平方和等于四边的平方和.

1 相反　2 1　3 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$　4 0　5 0

8.1.3 向量数量积的坐标运算

1. 向量的坐标与向量的数量积

我们知道，在平面直角坐标系中，分别给定与 x 轴、y 轴正方向相同的单位向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 之后，如果对于平面内的向量 $\boldsymbol{a}$，有

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2,$$

则$(x,\ y)$就是向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$．而且，$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$是一组单位正交基底，这就是说，

$$\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2=1,\ \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad}.$$

因此

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1=(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_1=x\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1=x.$$

类似地，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2=y$，即 $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2$．也就是说，$\boldsymbol{a}$ 在单位正交基底$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$下的坐标为$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_2)$，如图 8-1-11 所示．这也可通过向量数量积的几何意义看出来，请读者自行尝试．

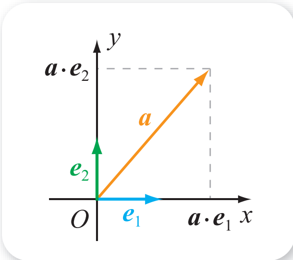


图 8-1-11

下面我们讨论怎样通过向量的坐标来计算向量的数量积等．

尝试与发现

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$，能否用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$?

由向量坐标的定义可知，存在单位正交基底$\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2\}$，使得

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2,$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{e}_1+y_1\boldsymbol{e}_2)\cdot(x_2\boldsymbol{e}_1+y_2\boldsymbol{e}_2)\\&=x_1x_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1+x_1y_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+y_1x_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1+y_1y_2\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2\\&=x_1x_2+y_1y_2,\end{aligned}$$

从而

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2.}$$

由此可知，利用向量的坐标可以迅速地算出向量的数量积．

而且，当 $\boldsymbol{a}=(x_1,\ y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,\ y_2)$都不是零向量时，因为

$$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=x_1^2+y_1^2,\ |\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=x_2^2+y_2^2,$$

所以

$$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}.$$

也就是说，根据向量的坐标，还能方便地算出它们的模以及夹角等.

在平面直角坐标系中，如果 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1),$$

从而 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$，因此

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

这就是说，利用向量的数量积，同样可以方便地得出平面直角坐标系中两点之间的距离公式.

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=(3, -1)$，$\boldsymbol{b}=(1, -2)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

解 由题意可知

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(3, -1)\cdot(1, -2)=3\times1+(-1)\times(-2)=5,$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10},$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}.$$

又因为

$$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=$ 2 ________.

例 2 已知点 $A(1, 2)$，$B(3, 4)$，$C(5, 0)$，求 $\angle BAC$ 的余弦值.

解 因为

$$\overrightarrow{AB}=(3-1, 4-2)=(2, 2),$$

$$\overrightarrow{AC}=(5-1, 0-2)=(4, -2),$$

所以

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times4+2\times(-2)=4,$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8},$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20},$$

因此

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{4}{\sqrt{8}\times\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

2. 用向量的坐标表示两个向量垂直的条件

尝试与发现

设 $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$，能否用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示出 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件？

因为 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}=$ 3 ______，因此

$$\boxed{\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0.}$$

这就是说，利用向量的坐标与向量的数量积，可以方便地表达出向量垂直的条件.

例 3 已知点 $A(1,2)$，$B(2,3)$，$C(-2,5)$，求证：$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

证明 因为

$$\overrightarrow{AB}=(2,3)-(1,2)=(1,1),$$

$$\overrightarrow{AC}=(-2,5)-(1,2)=(-3,3),$$

所以

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=(1,1) \cdot (-3,3)=1\times(-3)+1\times 3=0,$$

因此 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

例 4 如图 8-1-12 所示，已知点 $A(2,1)$，将向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得到 $\overrightarrow{OB}$，求点 B 的坐标.

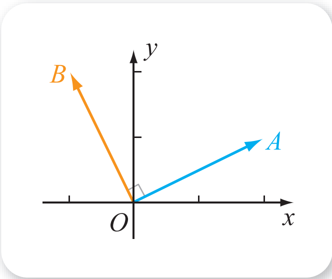


图 8-1-12

解 由已知可得

$$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}|,\quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=0.$$

又因为 $\overrightarrow{OA}=(2,1)$，设 $B(x,y)$，则 $\overrightarrow{OB}=$ 4 ______，从而有

$$\begin{cases} x^2+y^2=2^2+1^2, \\ 2x+y=0, \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$

又因为由图可知 $x<0$，所以 $B(-1,2)$.

例 5 如图 8-1-13 所示，已知正方形 $ABCD$ 中，P 为对角线 AC 不在端点上的任意一点，$PE \perp AB$，$PF \perp BC$，连接 DP，EF. 求证：$DP \perp EF$.

图 8-1-13　　图 8-1-14

证明 以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，正方形的边长为单位长，建立如图 8-1-14 所示的平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，$B(1,0)$，$D(0,1)$，从而

$$\overrightarrow{AB}=(1,0),\quad \overrightarrow{AD}=\text{5 \_\_\_\_\_\_}.$$

由已知，可设 $P(a, a)$，其中 $0<a<1$，则 $E(a, 0)$，$F(1, a)$，因此

$$\overrightarrow{DP}=(a, a-1), \quad \overrightarrow{EF}=\boxed{6}\underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

又因为

$$\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{EF}=a(1-a)+(a-1)a=0,$$

所以 $\overrightarrow{DP}\perp\overrightarrow{EF}$，因此 $DP\perp EF$.

例 5 说明，建立合适的平面直角坐标系之后，可以方便地借助向量的坐标来解决有关几何问题.

拓展阅读

向量的数量积与三角形的面积

在平面直角坐标系 xOy 中，给定 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，假设 O，A，B 不在同一条直线上，如图 1 所示，你能用 A，B 的坐标表示出△OAB 的面积吗？

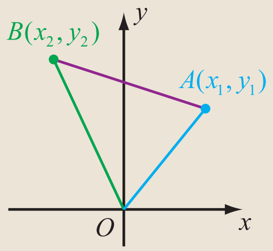


图 1

一般地，利用向量的数量积可以方便地求出△OAB 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

事实上，如图 2 所示，记 $t=OA$，$\boldsymbol{a}=\frac{1}{t}(-y_1, x_1)$，则容易验证，$\boldsymbol{a}$ 是与 $\overrightarrow{OA}$ 垂直的单位向量.

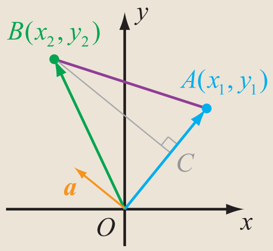


图 2

过 B 作 OA 的垂线 BC. 因为 $\boldsymbol{a}$ 为单位向量，所以由向量数量积的几何意义可知

$$BC=|\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{OB}|,$$

因此，△OAB 的面积为

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}AO\times BC=\frac{1}{2}AO\times|\boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{OB}|\\&=\frac{1}{2}t\times\left|\frac{1}{t}(-y_1, x_1)\cdot(x_2, y_2)\right|\\&=\frac{1}{2}|(-y_1, x_1)\cdot(x_2, y_2)|\\&=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.\end{aligned}$$

由此也可以看出，如图 3 所示，如果

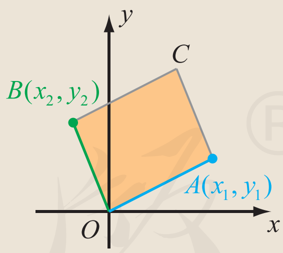


图 3

$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，而且 O，A，B 三点不共线，则以 OA，OB 为邻边的平行四边形 $OACB$ 的面积为

$$S=|x_1y_2-x_2y_1|.$$

由此你能体会到向量数量积的作用之大吗？

练习A

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标，分别求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 和 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

   (1) $\boldsymbol{a}=(4,-3)$，$\boldsymbol{b}=(-4,3)$；　(2) $\boldsymbol{a}=(3,5)$，$\boldsymbol{b}=(-5,3)$；

   (3) $\boldsymbol{a}=(12,5)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$；　(4) $\boldsymbol{a}=(-11,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,9)$.

2. 已知 $A(1,2)$，$B(-5,8)$，$C(-2,-1)$，求证：$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.
3. 求证：对任意实数 k，向量 $k(-y,x)$ 与向量 (x,y) 垂直.
4. 若 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{13}$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.
5. 已知点 $A(3,1)$，向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后等于 $\overrightarrow{OB}$，求点 B 的坐标.

练习B

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,\lambda)$，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为锐角，求 λ 的取值范围.
2. 已知 $A(1,1)$，$B(-3,4)$，$C(0,8)$，试求 $\triangle ABC$ 三个内角的大小.
3. 求与下列向量垂直的单位向量.

   (1) $\boldsymbol{a}=(3,4)$；　(2) $\boldsymbol{b}=(-1,1)$；

   (3) $\boldsymbol{c}=(12,-5)$；　(4) $\boldsymbol{d}=(8,-15)$.

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,3)$，$\boldsymbol{b}=(-2,5)$，求 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量.
5. 已知点 $A(1,1)$，$B(5,3)$，将向量 $\overrightarrow{AB}$ 绕点 A 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到 $\overrightarrow{AC}$，求点 C 的坐标.
6. 已知点 H 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内，且满足 $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$，求证：点 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心（即三条高的交点）.

1 0　2 $\frac{\pi}{4}$　3 0　4 (x,y)　5 $(0,1)$　6 $(1-a,a)$

习题8-1A

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,3)$，求

   (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$；

   (3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；　(4) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$.

2. 已知 $\triangle ABC$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=5$，$|\overrightarrow{AC}|=4$，$\angle BAC=120°$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
3. 已知 $|\boldsymbol{b}|=5$，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量是 -3，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

4. 判断下列各对向量是否垂直.

(1) $\boldsymbol{a}=(-3,\ 2)$，$\boldsymbol{b}=(4,\ 6)$； (2) $\boldsymbol{a}=(7,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,\ 14)$；

(3) $\boldsymbol{a}=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$，$\boldsymbol{b}=\left(2,\ -\frac{2}{3}\right)$； (4) $\boldsymbol{a}=(3,\ 5)$，$\boldsymbol{b}=(5,\ 3)$.

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(x,\ y)$，$\boldsymbol{b}=(-y,\ x)$，$\boldsymbol{c}=(y,\ -x)$，求证：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$.

6. 已知 $\boldsymbol{a}=(-2,\ -3)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ 2)$，求 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$ 的余弦值.

7. 已知 $A(7,\ 5)$，$B(2,\ 3)$，$C(6,\ -7)$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

习题8-1B

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,\ 5)$，$\boldsymbol{b}=(-3,\ 2)$，求 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量.

2. 已知三点 $A(-1,\ 1)$，$B(2,\ 3)$，$C(3,\ -1)$，求证：$\triangle ABC$ 是锐角三角形.

3. 若向量 $\boldsymbol{a}=(x,\ 2x)$，$\boldsymbol{b}=(-3x,\ 2)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角，求 x 的取值范围.

4. 已知正方形 $ABCD$，点 $A(-2,\ 3)$，$C(1,\ 1)$，求顶点 D 的坐标.

5. 已知 $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$，$|\boldsymbol{i}|=|\boldsymbol{j}|=1$，$\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$，计算 $\boldsymbol{a}^2+3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+1$.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,\ 4)$，$\boldsymbol{b}=(8,\ 6)$，$\boldsymbol{c}=(2,\ k)$，且 $\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\rangle$，求 k 的值.

7. 如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，分别根据下列各式判断 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 之间的位置关系.

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$； (2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$；

(3) $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$； (4) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；

(5) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$； (6) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

8. 已知 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{b}=(3,\ 4)$，求 $|\boldsymbol{a}|$ 的取值范围.

9. 作图说明，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$上的投影为 $\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{c}=\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\cos\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle\boldsymbol{b}$.

8.2 三角恒等变换

8.2.1 两角和与差的余弦

尝试与发现

（1）我们已经知道了 $30°$，$45°$的正弦、余弦值，那么，能否根据这些值求出 $\cos 15°$的值呢？

（2）一般地，怎样根据 α 与 β 的三角函数值求出 $\cos(\alpha-\beta)$的值？

因为 $15°=45°-30°$，所以 $\cos 15°=\cos(45°-30°)$，因此可能有人会猜想

$$\cos 15°=\cos 45°-\cos 30°=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2},$$

但这显然是不对的：$\cos 15°$一定大于 0，但上式右边小于 0.

事实上，利用单位圆以及向量的数量积，可以证明，对任意 α 与 β，都有

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.}$$

这就是两角差的余弦公式，通常简记为 $C_{\alpha-\beta}$.

证明 如图 8-2-1 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，设 α，β 的终边与单位圆的交点分别为 P，Q，则 $P(\cos\alpha，\sin\alpha)$，$Q(\cos\beta，\sin\beta)$，因此

$\overrightarrow{OP}=$ **1** ________，$\overrightarrow{OQ}=$ **2** ________.

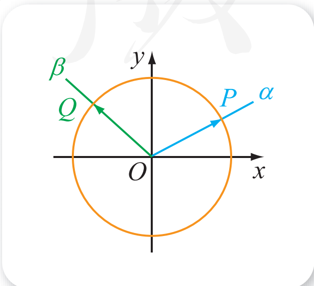


图 8-2-1

从而有

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(\cos\alpha，\sin\alpha)\cdot(\cos\beta，\sin\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

另一方面，由图 8-2-1 可知，存在 $k\in\mathbf{Z}$，使得

$$\langle\overrightarrow{OP}，\overrightarrow{OQ}\rangle=\alpha-\beta+2k\pi \text{ 或 } \langle\overrightarrow{OP}，\overrightarrow{OQ}\rangle=\beta-\alpha+2k\pi,$$

因此 $\cos\langle\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\rangle=\cos(\alpha-\beta)$，又因为 $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=1$，所以

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\langle\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}\rangle=\cos(\alpha-\beta).$$

故 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

利用 $C_{\alpha-\beta}$ 可知

$$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

当然，$\cos 15^\circ$的值也可借助 60°与 45°来求，即

$$\cos 15^\circ=\cos(60^\circ-45^\circ)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

例 1 利用 $C_{\alpha-\beta}$ 证明以下诱导公式.

（1）$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$；（2）$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$.

证明 （1）由 $C_{\alpha-\beta}$ 可知

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha$$
$$=0\times\cos\alpha+1\times\sin\alpha=\sin\alpha.$$

（2）由 $C_{\alpha-\beta}$ 可知

$$\cos(\pi-\alpha)=\cos\pi\cos\alpha+\sin\pi\sin\alpha$$
$$=(-1)\times\cos\alpha+0\times\sin\alpha=-\cos\alpha.$$

借助 $C_{\alpha-\beta}$ 以及诱导公式可以得到两角和的余弦公式 $C_{\alpha+\beta}$，即

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.}$$

尝试与发现

怎样证明 $C_{\alpha+\beta}$？

证明 因为 $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$，所以

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]$$
$$=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

类似地，利用 $C_{\alpha+\beta}$ 可以证明 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$ 3 ________，留作练习.

例 2 求 $\cos 105^\circ$的值.

解 $\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)$

$$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

例 3 已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，其中$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$，$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$.

解 因为 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，所以

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\boxed{4}\underline{\qquad\qquad}.$$

因此

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$$

$$=\frac{3-4\sqrt{3}}{10},$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$$

$$=-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}.$$

例 4 求 $\cos 20^\circ\cos 25^\circ-\sin 20^\circ\sin 25^\circ$的值.

解 由 $C_{\alpha+\beta}$ 可知

$$\cos 20^\circ\cos 25^\circ-\sin 20^\circ\sin 25^\circ=\cos(20^\circ+25^\circ)$$

$$=\cos 45^\circ=\boxed{5}\underline{\qquad\qquad}.$$

练习A

1. 求下列各式的值.

(1) $\cos 75^\circ$；　(2) $\cos\frac{7\pi}{12}$；　(3) $\cos(-165^\circ)$；　(4) $\cos\left(-\frac{61\pi}{12}\right)$.

2. 利用 $C_{\alpha+\beta}$ 证明：$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

3. 对任意 α 与 β，$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$ 一定不成立吗？说明理由.

④ 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，其中 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

⑤ 求下列各式的值.

（1）$\cos 80^\circ\cos 20^\circ+\sin 80^\circ\sin 20^\circ$；（2）$\cos 10^\circ\cos 20^\circ-\sin 10^\circ\sin 20^\circ$.

练习B

① 求下列各式的值.

（1）$\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ$；（2）$\cos 70^\circ\sin 80^\circ+\sin 70^\circ\sin 10^\circ$.

② 化简下列各式.

（1）$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)$；（2）$\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$.

③ 已知 $\sin\alpha=\frac{15}{17}$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\cos(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

④ 证明下列各式.

（1）$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$；（2）$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$.

1 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$　2 $(\cos\beta,\ \sin\beta)$　3 $-\sin\alpha$　4 $\frac{3}{5}$　5 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8.2.2 两角和与差的正弦、正切

1. 两角和与差的正弦

尝试与发现

（1）怎样借助 30°，45° 的三角函数值求出 $\sin 75^\circ$，$\sin 15^\circ$ 的值？

（2）一般地，怎样根据 α 与 β 的三角函数值求出 $\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$ 的值？

虽然 $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)$，$\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$，但是

$$\sin 75^\circ\neq\sin 30^\circ+\sin 45^\circ,\quad \sin 15^\circ\neq\sin 45^\circ-\sin 30^\circ.$$

请读者自行尝试.

当然，我们可以这样求 sin 75°的值：

$$\sin 75^\circ=\sin(90^\circ-15^\circ)=\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

受此启发，根据两角和与差的余弦公式（即 $C_{\alpha+\beta}$ 与 $C_{\alpha-\beta}$）可以证明如下的两角和与差的正弦公式.

$$S_{\alpha+\beta}:\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$S_{\alpha-\beta}:\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

证明 由诱导公式以及两角和与差的余弦公式可知

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin[\alpha+(-\beta)]\\&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

例如，

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ&=\sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ&=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

利用 $S_{\alpha+\beta}$ 与 $S_{\alpha-\beta}$ 同样可以求出 sin 105°以及证明诱导公式 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$ $\boxed{1}$______，$\sin(\pi-\alpha)=$ $\boxed{2}$______等，留作练习.

例 1 已知向量 $\overrightarrow{OP}=(3,\ 4)$，如图 8-2-2 所示，将向量 $\overrightarrow{OP}$ 绕原点 O 沿逆时针方向旋转 45°到 $\overrightarrow{OP'}$ 的位置. 求点 $P'(x',\ y')$ 的坐标.

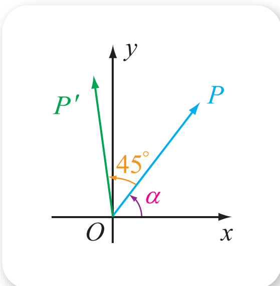


图 8-2-2

解 设 $\angle xOP=\alpha$，则因为 $|OP|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以

$\cos\alpha=$ $\boxed{3}$______，$\sin\alpha=$ $\boxed{4}$______.

因此

$$
\begin{aligned}
x' &= 5\cos(\alpha+45^\circ)\\
&= 5(\cos\alpha\cos 45^\circ - \sin\alpha\sin 45^\circ)\\
&= 5\left(\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\\
y' &= 5\sin(\alpha+45^\circ)\\
&= 5(\sin\alpha\cos 45^\circ + \cos\alpha\sin 45^\circ)\\
&= 5\left(\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

从而 $P'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

例 2 求证：$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

证明 因为 $\cos\frac{\pi}{6}=$ 5 __________，$\sin\frac{\pi}{6}=$ 6 __________，所以

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x &= \cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\\
&= \sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\\
&= \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}
$$

例 2 也可将右边直接用 $S_{\alpha+\beta}$ 展开来证明，请读者自行尝试.

尝试与发现

如果函数 $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$，你能求出 $f(x)$的最大值及最大值点吗？

由例 2 的结果可知，$f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，因此 $f(x)$的最大值为 1，而且 $f(x)$的最大值点 x_0 满足 $x_0+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，因此最大值点为$\frac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

例 3 在求函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的最小值时，下面的说法正确吗？

“因为 $\sin x$ 的最小值为-1，$\cos x$ 的最小值也为-1，所以 $f(x)$的最小值为-2.”

如果不对，指出原因，并求 $f(x)$的周期、最小值与最小值点.

解 因为 $\sin x=-1$ 时有 $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$；而 $\cos x=-1$ 时有 $x=\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 因此 $\sin x=-1$ 与 $\cos x=-1$ 不能同时成立，这就是说，

$f(x)$ 的最小值不是 -2，有关说法不对.

又因为 $\cos\dfrac{\pi}{4}=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以

$$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

由此可知函数 $f(x)$ 的周期为 2π，最小值为 $-\sqrt{2}$，而且最小值点 x_0 满足 $x_0+\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，因此最小值点为 $-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

由例 3 可以看出，当 a，b 都是不为零的常数时，为了求出函数

$$f(x)=a\sin x+b\cos x$$

的周期、最值等，关键是要将函数化为 $f(x)=A\sin(x+\varphi)$ 的形式. 也就是说，要找到合适的 A 和 φ，使得

$$a\sin x+b\cos x=A\sin(x+\varphi) \qquad ①$$

恒成立.

尝试与发现

满足①式的 A 和 φ 一定存在吗？它们与 a，b 有什么关系？

如果①式恒成立，则将①式的右边用 $S_{\alpha+\beta}$ 展开可得

$$a\sin x+b\cos x=A\sin x\cos\varphi+A\cos x\sin\varphi,$$

因此 $a=A\cos\varphi$，$b=A\sin\varphi$，从而可知

$$a^2+b^2=(A\cos\varphi)^2+(A\sin\varphi)^2=A^2,$$

因此，如果取 $A=\sqrt{a^2+b^2}$，则有

$$\cos\varphi=\frac{a}{A}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{A}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad ②$$

由②式以及任意角的余弦、正弦的定义可知，若记平面直角坐标系中坐标为 (a, b) 的点为 P，而 φ 是以射线 OP 为终边的角，如图 8-2-3 所示，则 φ 一定满足②式.

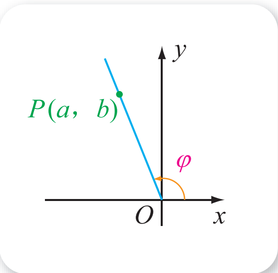


图 8-2-3

这就是说，满足①式的 A 和 φ 一定存在. 因此

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

其中 φ 满足②式.

例 4 已知函数 $f(x)=\sin 5x-\sqrt{3}\cos 5x$，求 $f(x)$的周期、最小值及最小值点.

解 因为$\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$，所以

$$\begin{aligned}f(x)&=2\left(\frac{1}{2}\sin 5x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x\right)\\&=2\left[\sin 5x\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos 5x\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\\&=2\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

由此可知函数 $f(x)$的周期为$\frac{2\pi}{5}$，最小值为 7 ________，而且最小值点 x_0 满足 $5x_0-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，因此最小值点为$-\frac{\pi}{30}+\frac{2k\pi}{5}$，$k\in\mathbf{Z}$.

2. 两角和与差的正切

尝试与发现

（1）怎样借助 30°，45°的三角函数值求出 tan 75°，tan 15°的值？

（2）一般地，由 $\tan\alpha$ 与 $\tan\beta$ 的值能求出 $\tan(\alpha+\beta)$，$\tan(\alpha-\beta)$的值吗？

因为

$$\tan 75^\circ=\frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}=\frac{\sin(30^\circ+45^\circ)}{\cos(30^\circ+45^\circ)},$$

所以可以借助 30°，45°的正弦值与余弦值求出 tan 75°的值，那么，能不能借助 tan 30°与 tan 45°求出 tan 75°呢？答案是肯定的.

一般地，可以证明如下的两角和与差的正切公式.

$$T_{\alpha+\beta}：\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},$$

$$T_{\alpha-\beta}：\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

其中 α 和 β 的取值应使各项都有意义.

事实上，因为

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta},$$

所以在上式右边的分子分母同时除以 $\cos\alpha\cos\beta$，即可得到 $T_{\alpha+\beta}$. 而 $T_{\alpha-\beta}$ 的证明，既可以用类似的方法得到，也可从 $T_{\alpha+\beta}$ 与 $\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]$ 得到，请读者自行尝试.

例 5 求下列各式的值.

（1）$\tan 75°$；（2）$\dfrac{\tan 17°+\tan 43°}{1-\tan 17°\tan 43°}$；（3）$\dfrac{1-\tan 15°}{1+\tan 15°}$.

解 （1）$\tan 75°=\tan(45°+30°)=\dfrac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}.$$

（2）$\dfrac{\tan 17°+\tan 43°}{1-\tan 17°\tan 43°}=\tan(17°+43°)=\tan 60°=\sqrt{3}$.

（3）因为 $\tan 45°=1$，所以

$$\frac{1-\tan 15°}{1+\tan 15°}=\frac{\tan 45°-\tan 15°}{1+\tan 45°\tan 15°}=\tan(45°-15°)=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

练习A

1. 利用 $S_{\alpha+\beta}$ 与 $S_{\alpha-\beta}$ 证明以下诱导公式.

（1）$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$；（2）$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$.

2. 求下列各式的值.

（1）$\sin 105°$；（2）$\sin\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$；（3）$\tan 15°$；（4）$\tan\dfrac{7\pi}{12}$.

3. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{15}{17}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

4. 已知 $\tan x=2$，$\tan y=5$，求 $\tan(x+y)$，$\tan(x-y)$.

5. 已知向量 $\overrightarrow{OP}=(4,\ 3)$，将 $\overrightarrow{OP}$ 绕原点 O 旋转 $60°$，$120°$，$-60°$ 到 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}$ 的位置. 求点 P_1，P_2，P_3 的坐标.

练习B

1. 求下列各式的值.

（1）$\dfrac{1+\tan 15°}{1-\tan 15°}$；（2）$\dfrac{1-\tan 75°}{1+\tan 75°}$；

（3）$\sin 35°\cos 25°+\sin 55°\cos 65°$；（4）$\cos 28°\cos 73°+\cos 62°\cos 17°$.

❷ 已知 $P(a, b)$ 为平面直角坐标系中一点，将向量 $\overrightarrow{OP}$ 绕原点 O 逆时针方向旋转 θ 角到 $\overrightarrow{OP'}$ 的位置．求点 $P'(x', y')$ 的坐标．

❸ 若 α，β 均为锐角，且 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，求 $\alpha+\beta$．

❹ 求下列函数的周期、最值以及最值点．

(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$；　　(2) $f(x)=\cos 3x-\sin 3x$．

❺ 已知 x_0 是函数 $f(x)=3\sin x+4\cos x$ 的最大值点，求 $\sin x_0$ 的值．

1 $\cos\alpha$　2 $\sin\alpha$　3 $\dfrac{3}{5}$　4 $\dfrac{4}{5}$　5 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　6 $\dfrac{1}{2}$　7 -2

8.2.3 倍角公式

尝试与发现

你能根据前面学过的内容，写出由 α 的三角函数值求出 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的一般公式吗？

如果在两角和的正弦公式 $S_{\alpha+\beta}$ 中，令 $\beta=\alpha$，则可得出求 $\sin 2\alpha$ 的公式，即

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

类似地，可得

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

因此

$$S_{2\alpha}:\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$C_{2\alpha}:\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

$$T_{2\alpha}:\ \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

这 3 个公式称为**倍角公式**．

需要注意的是，因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $C_{2\alpha}$ 也可改写为

$$\boxed{\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.}$$

例 1 已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$ 的值.

解 因为 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13},$$

因此

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{5}{13}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{120}{169},$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{119}{169},$$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{120}{169}\div\frac{119}{169}=-\frac{120}{119}.$$

例 2 证明下列恒等式.

（1）$\dfrac{\sin 2\theta+\sin\theta}{2\cos 2\theta+2\sin^2\theta+\cos\theta}=\tan\theta$；（2）$\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$.

证明 （1）左边$=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+2\sin^2\theta+\cos\theta}$

$$=\frac{\sin\theta(2\cos\theta+1)}{\cos\theta(2\cos\theta+1)}=\tan\theta=\text{右边}.$$

（2）左边$=\dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$$=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\text{右边}.$$

例 2 的(2)中，也可以通过左右两边同时化简证得，请读者自行尝试.

例 3 求函数 $y=2\cos^2x+\sin 2x-1$ 的周期和最大值.

解 因为

$$\begin{aligned}y&=2\cos^2x-1+\sin 2x\\&=\sin 2x+\cos 2x\\&=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right)\\&=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),\end{aligned}$$

因此，所求函数的周期为 1 ________，最大值为 2 ________.

例 4 已知函数 $f(x)=4\sin x\cos x-4\sqrt{3}\cos^2 x+2\sqrt{3}$，$x\in\left[0,\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$，求 $f(x)$的值域.

解 因为

$$\begin{aligned}f(x)&=4\sin x\cos x-4\sqrt{3}\cos^2 x+2\sqrt{3}\\&=2\sin 2x-2\sqrt{3}(2\cos^2 x-1)\\&=2\sin 2x-2\sqrt{3}\cos 2x\\&=4\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)\\&=4\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right),\end{aligned}$$

又因为 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$，所以

$$\boxed{3}\_\_\_\_\_\_\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\boxed{4}\_\_\_\_\_\_,$$

从而可知

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)\leqslant\sin\frac{\pi}{2},$$

因此 $-2\sqrt{3}\leqslant f(x)\leqslant 4$，故所求值域为 $\boxed{5}$______.

例 5 如图 8-2-4 所示，已知△ABC 中，α 为锐角，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，D 是 AC 边上一点，且 $AD=BD$，求 γ 的正弦值.

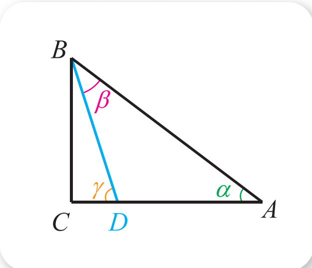


图 8-2-4

解 因为 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ 且 $\alpha\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，所以

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}.$$

又因为 $AD=BD$，所以 $\beta=\alpha$，因此 $\gamma=2\alpha$，从而

$$\sin\gamma=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}.$$

练习A

1. 求下列各式的值.

(1) $2\sin 67°30'\cos 67°30'$；　(2) $\cos^2\dfrac{\pi}{8}-\sin^2\dfrac{\pi}{8}$；　(3) $2\cos^2\dfrac{\pi}{12}-1$；

(4) $1-2\sin^2 75°$；　(5) $\sin 15°\cos 15°$；　(6) $\dfrac{2\tan 22.5°}{1-\tan^2 22.5°}$.

2 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\tan 2\alpha$ 的值.

3 化简下列各式.

(1) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$；

(2) $\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$；

(3) $\cos^4\varphi-\sin^4\varphi$；

(4) $\frac{1}{1-\tan\theta}-\frac{1}{1+\tan\theta}$.

4 已知 $\sin\alpha=\frac{12}{13}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，求 $\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$ 的值.

5 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

练习B

1 求函数 $y=\cos^2 x-\sin^2 x$ 的周期与最大值.

2 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=1$，求 $\cos 2\alpha$ 的值.

3 求 $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$的值.（提示：乘以并除以 $\sin 20^\circ$.）

4 已知等腰三角形的顶角的余弦等于$\frac{7}{20}$，求这个三角形一个底角的正弦和余弦.

5 求函数 $y=1-2\sin^2 x-\sin 2x$ 的周期、最值和最值点.

1 π　　2 $\sqrt{2}$　　3 $-\frac{\pi}{3}$　　4 π　　5 $[-2\sqrt{3},\ 4]$

8.2.4 三角恒等变换的应用

前面我们学习了两角和与差的正弦、余弦、正切公式，倍角公式，以及它们的一些应用，初步感受到了这些三角恒等变换在研究三角函数性质中的重要性. 这里我们将继续学习前面所学公式的应用.

尝试与发现

你能利用倍角公式 $C_{2\alpha}$ 推导出以下公式吗？

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\quad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},\quad \tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

事实上，由 $C_{2\alpha}$ 可得

$$\cos\alpha=\cos\left(2\times\frac{\alpha}{2}\right)=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

因此 $2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$，即

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}. \qquad ①$$

类似地，因为

$$\cos\alpha=\cos\left(2\times\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1,$$

所以有 $2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$，即

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}. \qquad ②$$

①②两个等式左边、右边分别相除，即可得

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad ③$$

例 1 求证：

（1）$\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$；　　（2）$\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

证明 （1）$\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

（2）$\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1-\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

另外，需要注意的是，①②③式中，左边都是平方的形式，但如果知道 $\cos\alpha$ 的值和角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在象限，就可以通过开方求得 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$ 的值.

例如，由③可知

$$\tan^2 15^\circ=\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=(2-\sqrt{3})^2,$$

又因为 $\tan 15^\circ>0$，所以

$$\tan 15^\circ=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=\boxed{1}\underline{\qquad\qquad}.$$

再例如，由①可知

$$\sin^2 15^\circ=\frac{1-\cos 30^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4},$$

又因为 $\sin 15^\circ>0$，所以

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ&=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}\\&=\sqrt{\frac{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1^2}{8}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}}\\&=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

一般地，①②③可以变形为

$$S_{\frac{\alpha}{2}}:\ \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$C_{\frac{\alpha}{2}}:\ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$T_{\frac{\alpha}{2}}:\ \tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

其中根号前的正负号，由角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限确定. 一般称这 3 个公式为**半角公式**.

尝试与发现

如果已知 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，你能求出 $\cos\alpha\cos\beta$ 以及 $\sin\alpha\sin\beta$ 的值吗?

因为

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

所以两式分别相加、相减之后整理可得

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)], \qquad ④$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]. \qquad ⑤$$

由此可知，在尝试与发现中，

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{20},$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{20}.$$

类似地，由

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

可得

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)], \qquad ⑥$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]. \qquad ⑦$$

④⑤⑥⑦的左边是积的形式，右边是和或差的形式，因此被称为**积化和差公式**.

例 2 求函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x$ 的周期与最大值.

解 由积化和差公式可知

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4},$$

所以函数的周期为 2 ________，最大值为 3 ________.

例 2 也可借助 $S_{\alpha+\beta}$ 以及二倍角公式等求解，请读者自行尝试.

尝试与发现

（1）你能借助④式求出函数 $f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值吗?

（2）令 $x=\alpha+\beta$，$y=\alpha-\beta$，然后改写积化和差公式.

根据④式可知，

$$f(x)=2\cos x\cos\frac{\pi}{3}=\cos x,$$

因此可知 $f(x)$ 的最大值为 4 ________.

一般地，如果 $x=\alpha+\beta$，$y=\alpha-\beta$，则 $\alpha=\frac{x+y}{2}$，$\beta=\frac{x-y}{2}$，从而④⑤⑥⑦可分别改写为

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$

这四个公式左边是和或差的形式，右边是积的形式，因此被称为**和差化积公式**.

例 3 求函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期与最大值.

解 由和差化积公式可知

$$\begin{aligned}f(x)&=2\sin\frac{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{2}\cos\frac{\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{2}\\&=2\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}\\&=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right),\end{aligned}$$

所以函数的周期为 5 ________，最大值为 6 ________.

例 3 也可借助 $S_{\alpha+\beta}$，$S_{\alpha-\beta}$ 等求解，请读者自行尝试.

例 4 已知 $A+B+C=180°$①，求证：

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

证明 因为 $A+B+C=180°$，所以

$$C=180°-(A+B),\quad \frac{C}{2}=90°-\frac{A+B}{2},$$

因此

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B+\sin C&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)\\&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}\\&=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\\&=2\sin\frac{A+B}{2}\times2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{-B}{2}\\&=2\cos\frac{C}{2}\times2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\\&=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.\end{aligned}$$

探索与研究

探索 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 是否都可用 $\tan\frac{\alpha}{2}$ 表示. 如果能，请写出相关的表达式，并举例说明这些公式的作用.

① 在不引起混淆的情况下，角也可以用它的顶点字母来表示.

拓展阅读

正弦型函数与信号处理

前面我们已经看到，两个周期相同的正弦型函数相加，利用三角恒等变换，一定可以把结果化为同一个周期的正弦型函数．而且，不难看出，这一结果可以推广到有限多个同周期的正弦型函数．

那么，不同周期的正弦型函数相加，结果会怎样呢？图 1 是函数

$$f(x)=\sin x+\sin 2x+\sin 3x$$

的图象，由此你能发现什么？

可以看出，$f(x)$ 的图象呈现的还是周期性变化（事实上，$f(x)$ 仍是一个周期函数）．不过，相对于正弦曲线来说，$f(x)$ 的图象变化更加丰富．

那么，这是不是意味着所有的周期函数都可以借助正弦型函数相加来表示或者近似表示呢？答案是肯定的！例如，如图 2 所示是函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{7}\dfrac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1}$ 的图象，如图 3 所示是某种信号的波形，两者相似吗？

事实上，在现代社会中，信号处理是非常关键的技术．这只要想想我们几乎每天都在使用的电话或互联网就可以感受到！而信号处理背后的“功臣”就是正弦型函数！感兴趣的同学可以查找有关资料了解更多信息．

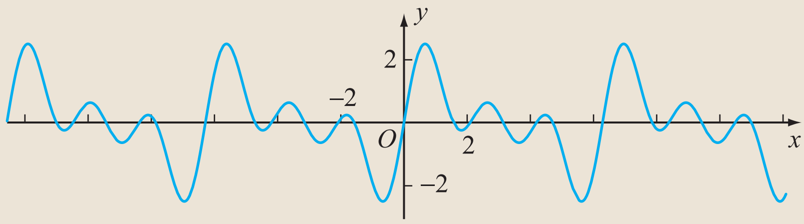


图 1

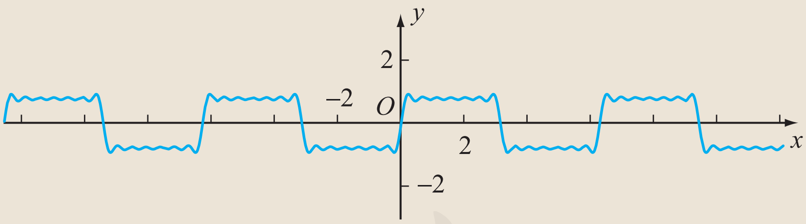


图 2

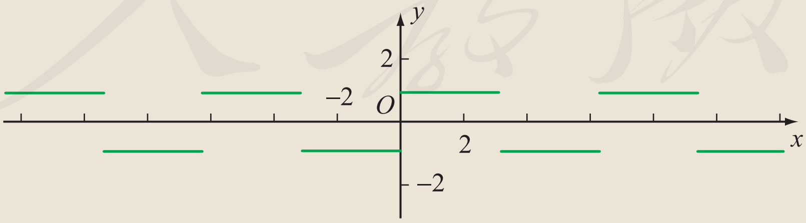


图 3

练习A

1. 求 $\cos 67°30'$ 的值.

2. 已知 $\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{2}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{3}$，求 $\cos\alpha\cos\beta$，$\sin\alpha\sin\beta$ 的值.

3. 已知 $\sin(\beta-\alpha)=-1$，$\sin(\alpha+\beta)=0$，求 $\cos\alpha\sin\beta$，$\sin(\pi-\alpha)\cos\beta$ 的值.

4. 证明下列恒等式.

(1) $\dfrac{\cos\alpha-\cos\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\tan\dfrac{\beta-\alpha}{2}$；　　(2) $\dfrac{\sin x-\sin y}{\sin(x+y)}=\dfrac{\sin\dfrac{1}{2}(x-y)}{\sin\dfrac{1}{2}(x+y)}$；

(3) $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$；　　(4) $\dfrac{\cos 2x+\cos 2y}{1+\cos 2(x+y)}=\dfrac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)}$.

练习B

1. 求函数 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos x$ 的周期与最小值.

2. 求函数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的周期与最大值.

3. 用半角公式求出 $\cos 15°$ 的值.

4. 求下列各式的值.

(1) $\dfrac{\sin 20°-\sin 40°}{\cos 20°-\cos 40°}$；　　(2) $\sin 20°+\sin 40°-\sin 80°$.

5. 如果 $A+B+C=\pi$，求证：

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

1 $2-\sqrt{3}$　　2 π　　3 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}$　　4 1　　5 2π　　6 $\sqrt{2}$

习题8-2A

1. 利用 $C_{\alpha+\beta}$ 证明：$\cos[\alpha+(2k+1)\pi]=-\cos\alpha$（其中 k 为整数）.

2. 举例说明 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 可能成立.

3. 是否存在 α 与 β，使得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\sin\beta$？说明理由.

4. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$，$\cos\beta=-\dfrac{3}{4}$，且 α，β 都是第二象限的角，求 $\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$ 的值.

5. 求下列各式的值.

(1) $\sin 13^\circ\cos 17^\circ+\cos 13^\circ\sin 17^\circ$;

(2) $\sin 70^\circ\cos 25^\circ-\sin 25^\circ\cos 70^\circ$;

(3) $\dfrac{\tan 12^\circ+\tan 33^\circ}{1-\tan 12^\circ\tan 33^\circ}$;

(4) $\dfrac{\tan\dfrac{5\pi}{12}-\tan\dfrac{\pi}{6}}{1+\tan\dfrac{5\pi}{12}\tan\dfrac{\pi}{6}}$.

6. 化简下列各式.

(1) $\sin(30^\circ+\alpha)-\sin(30^\circ-\alpha)$;

(2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

(3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right)$.

7. 求证：$\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)=2\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

习题8-2B

1. 求证下列恒等式.

(1) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$;

(2) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

2. 求下列各式的值.

(1) $\sin 105^\circ\cos 75^\circ$;

(2) $2\cos 37.5^\circ\cos 22.5^\circ$;

(3) $\cos^2 73^\circ+\cos^2 47^\circ+\cos 73^\circ\cos 47^\circ$;

(4) $2\cos\dfrac{9\pi}{13}\cos\dfrac{\pi}{13}+\cos\dfrac{5\pi}{13}+\cos\dfrac{3\pi}{13}$.

3. 已知 $\theta\in\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$，分别根据以下条件求 $\sin\theta$ 的值.

(1) $\sin 2\theta=\dfrac{1}{3}$;　(2) $\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}$;　(3) $\sin 2\theta=\dfrac{24}{25}$;　(4) $\sin 2\theta=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=\dfrac{12}{13}$，求 $\cos C$ 的值.

5. 求下列函数的周期.

(1) $y=\cos^2\dfrac{x}{2}$;

(2) $y=2\sin^2 x$.

6. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{4}{5}$，$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{4}{5}$，且 $(\alpha-\beta)\in\left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right)$，$(\alpha+\beta)\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$ 的值.

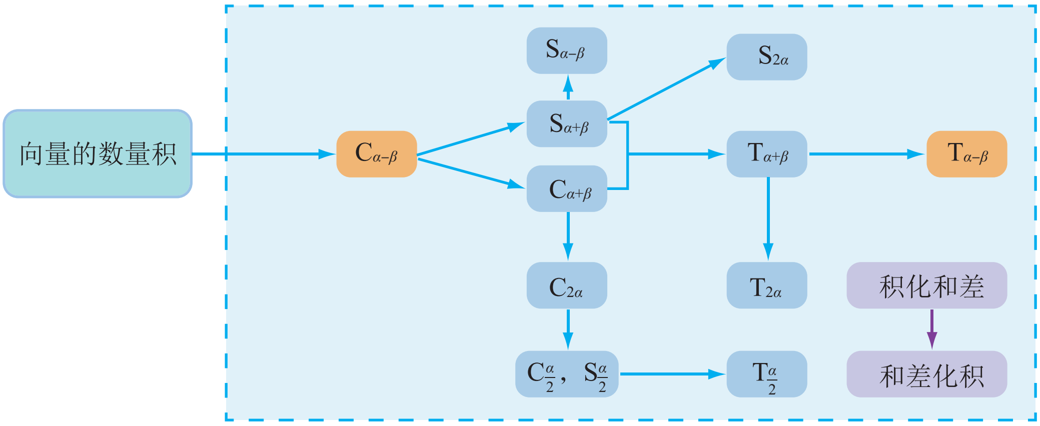
7. 求函数 $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$的最值.

本章小结

01 知识结构图设计与交流

本章我们学习了向量的数量积及其坐标运算，两角和与差的余弦、正弦、正切公式，倍角公式，以及半角公式、积化和差与和差化积公式等.

依照知识之间的联系，我们可以作出如下的知识结构图.



三角恒等变换

上述知识结构图还可以细化.

结合自己的学习心得，发挥你的想象力和创造力，为本章的知识重新设计出一份独特的知识结构图，然后和同学交流制作的心得吧！

02 课题作业

你知道吗？三角学的起源与天文有着密不可分的联系，人们最初是为了天文上的计算而关注三角学的. 而且，随着计算机技术的发展，三角学的地位实际上已经发生了变化：以前人们关注的是三角中的计算，现在大家更加关注的是三角函数的性质等.

与同学一起分工合作，查阅网络与有关书籍，了解三角学发展的历史与现状，并整理成小论文，然后与其他同学交流.

03 复习题

A 组

1. 已知点 O 在△ABC 所在的平面内，且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，说明 O 是△ABC 的内心还是外心.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=2$，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-2$，求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

3. 已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，它们的夹角为 $60°$，求 $|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|$.

4. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 为 CD 的中点，求 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$.

5. 证明下列恒等式.

（1）$\dfrac{1+\sin 2\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi}=\sin\varphi+\cos\varphi$；　　（2）$\sin\theta(1+\cos 2\theta)=\sin 2\theta\cos\theta$；

（3）$4\sin\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}=2\sin\theta+\sin 2\theta$.

6. 证明下列恒等式.

（1）$2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)=\sin 2\alpha$；　　（2）$\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}=\cos x$；

（3）$1+2\cos^2\theta-\cos 2\theta=2$.

7. 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{15}{17}$，且 $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},\ 2\pi\right)$，求 $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$的值.

8. 已知等腰三角形的一个底角的正弦等于$\dfrac{5}{13}$，求这个三角形顶角的正弦、余弦和正切.

9. 证明下列恒等式.

（1）$\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\cos 2\alpha$；　　（2）$\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$；

（3）$\dfrac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$.

10. 证明下列恒等式.

（1）$\tan(45°+\theta)=\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$；

（2）$\tan(x+y)\tan(x-y)=\dfrac{\tan^2x-\tan^2y}{1-\tan^2x\tan^2y}$.

11. 已知 $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=3$，且 α，β 都是锐角，求证：$\alpha+\beta=135°$.

12. 已知$\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，求 $\cos\alpha+\sin\alpha$.

B 组

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=10$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=5\sqrt{2}$，求$|\boldsymbol{b}|$.

3. 已知 $A(6,3)$，$B(9,3)$，$C(3,3+3\sqrt{3})$，求$\angle BAC$.

4. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，求$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$的最小值.

5. 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{2}$，$\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=60^\circ$，求$|\boldsymbol{c}|$的最大值.

6. 已知 A，B，C 为平面上的 3 点，而且 $AB=3$，$BC=4$，$CA=5$，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的值.

7. 在$\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，判断$\triangle ABC$ 的形状.

8. 已知 A，B，C 为圆 O 上的三点，若 $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，求 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角.

9. 化简下列各式.

(1) $\cos(27^\circ+\alpha)\cos(33^\circ-\alpha)-\sin(27^\circ+\alpha)\sin(33^\circ-\alpha)$；

(2) $\sin(\alpha-15^\circ)\cos(\alpha+15^\circ)+\cos(\alpha-15^\circ)\sin(\alpha+15^\circ)$.

10. 设 A，B，C 是$\triangle ABC$ 的 3 个内角，求证：

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

11. 证明下列恒等式.

(1) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$；

(2) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$.

12. 化简 $\sin 50^\circ(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ)$.

13. 求下列函数的周期、最值和最值点.

(1) $y=1+\cos x-\sin x$；

(2) $y=(\sin x-\cos x)^2$.

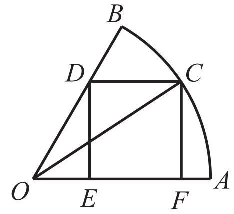
14. 求下列函数的周期、最值和最值点.

(1) $y=\sin x\cos x$；

(2) $y=\sqrt{3}\cos^2 x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

15. 求证：$\tan 20^\circ+\tan 25^\circ+\tan 20^\circ\tan 25^\circ=1$.

16. 已知圆心角为 60°的扇形 AOB 的半径为 1，C 是 AB 弧上一点，作矩形 $CDEF$，如图所示. 当 C 点在什么位置时，这个矩形的面积最大？这时$\angle AOC$ 等于多少度？



（第 16 题）

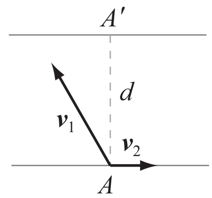
17. 求函数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，$x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$的最小值.

C 组

1. 长江某地南北两岸平行. 如图所示，江面宽度 $d=1$ km，一艘游船从南岸码头 A 出发航行到北岸. 假设游船在静水中的航行速度 $\boldsymbol{v}_1$ 的大小为 10 km/h，水流的速度 $\boldsymbol{v}_2$ 的大小为 4 km/h. 设 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 的夹角为 θ（$0^\circ<\theta<180^\circ$），北岸的点 A'在A 的正北方向. 回答下面的问题.

（1）当 $\theta=120^\circ$时，判断游船航行到达北岸的位置在 A'的左侧还是右侧，并说明理由.

（2）当 $\cos\theta$ 为多大时，游船能到达 A'处？需要航行多长时间？



（第 1 题）

2. 已知向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}$，$|\boldsymbol{e}|=1$，对任意 $t\in\mathbf{R}$，恒有$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$，则（　　）.

（A）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{e}$　　　　（B）$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

（C）$\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$　　　　（D）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

3. 若非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}|$，则（　　）.

（A）$|2\boldsymbol{a}|>|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$　　　　（B）$|2\boldsymbol{a}|<|2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$

（C）$|2\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$　　　　（D）$|2\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|$

4. 已知$\triangle ABC$ 中，BC 边上的高 AD 的长为 3，求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}$.

5. 已知$\triangle ABC$ 中，$AC=1$，$BC=\sqrt{3}$，$AB=2$，点 M，N 是线段 AB 上的动点，求 $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CN}$ 的最大值.

6. 求$\dfrac{3-\sin 70^\circ}{2-\cos^2 10^\circ}$的值.

后　记

本套教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材实验研究组依据教育部《普通高中数学课程标准（2017年版）》编写的，经国家教材委员会专家委员会2019年审核通过.

本套教科书的编写，集中反映了我国十余年来普通高中课程改革的成果，吸取了2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的编写经验，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教材编写专家、教研人员和一线教师，以及教材设计装帧专家的集体智慧.

我们衷心感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书　数学（B版）》的所有编写人员，尤其是因为种种原因未能参加此次教材修订的专家、学者：丁尔陞、江守礼、房艮孙、张润琦、高尚华、万庆炎、魏榕彬、邱万作、陈研、段发善、李迈岸、陈亦飞、刘长明、郭鸿、王池富……

本套教科书在编写过程中，得到了《普通高中数学课程标准（2017年版）》制定组、国家教材委员会专家委员会等的大力支持. 借此机会，向所有制定组成员、专家委员会成员以及其他为我们教材编写提供过帮助的专家表示衷心的感谢！

我们感谢对本套教科书的编写、出版、试教等提供过帮助与支持的所有同仁和社会各界朋友：王跃飞、胡细宝、邵丽云、王晓声、曹付生、侯立伟、王中华、王光图、王秀梅、卞文、邓艳强、田媛、史洪波、付一博、吕希、吕晶、朱明鲜、刘超、闫旭、池洪清、阮征、孙国华、牟柏林、李刚、李广勤、李洪岩、何艳国、张伟、张羽、张明、张文刚、张春青、张晶强、金永涛、郑继平、常丽艳、潘戈、薛达志、郑海军、赵争鸣、吴晖湘、戴莉、金盈、舒风杰、李祥广、胡文亮、王玉洁、杨长智、徐会吉、尹玉柱、尹燕花……

本套教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持. 对此，我们表示衷心的感谢！同时也向为本书提供照片的单位表示感谢！

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本套教科书的过程中提出宝贵意见．我们将集思广益，不断修订，以使教科书日臻完善．

本书责任编辑：王旭刚；美术编辑：史越；插图绘制：郑海军．

联系方式

电话：010-58758523，010-58758866

电子邮箱：mathb@pep.com.cn，jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中 学 数 学 教 材 实 验 研 究 组

2019 年 4 月

PUTONG GAOZHONG JIAOKESHU

SHUXUE

定价：　　　元